

Пример 11. $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} x dx.$

Решение. Положим $t = \operatorname{arctg} x$, тогда $x = \operatorname{tg} t$ и приходим к интегралу

$$\int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} x dx = \int t(atg^2 t + b) dt = \frac{bt^2}{2} + a \int t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt.$$

Последний интеграл вычислим интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt &= \int t d(\operatorname{tg} t - t) = t(\operatorname{tg} t - t) - \int (\operatorname{tg} t - t) dt = t \cdot \operatorname{tg} t - \frac{t^2}{2} + \\ &+ \ln|\cos t| + C. \end{aligned}$$

Подставляя, окончательно получим

$$\begin{aligned} \int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1} \cdot \operatorname{arctg} x dx &= \frac{bt^2}{2} + a \left(t \cdot \operatorname{tg} t - \frac{t^2}{2} + \ln|\cos t| \right) + C = \\ &= \frac{b-a}{2} t^2 + at \cdot \operatorname{tg} t + a \ln|\cos t| + C = \frac{b-a}{2} \operatorname{arctg}^2 x + \\ &+ ax \cdot \operatorname{arctg} x + a \ln|\cos(\operatorname{arctg} x)| + C = \frac{b-a}{2} \operatorname{arctg}^2 x + ax \cdot \operatorname{arctg} x - \\ &- \frac{1}{2} a \ln(1 + x^2) + C \quad (\text{так как } \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}). \end{aligned}$$

Пример 12. $\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x} dx.$

Решение. Положим $t = e^x$, тогда $\int \frac{\arcsin(e^x)}{e^x} dx = \int \frac{\arcsin t}{t^2} dt =$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{t} \arcsin t + \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{t} \arcsin t - \ln \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t} + C = \\ &= -e^{-x} \arcsin(e^x) - \ln(1 + \sqrt{1-e^{2x}}) + x + C \quad (x < 0). \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить неопределённые интегралы:

1. $\int sh^2 x ch^2 x dx.$

Ответ: $\frac{1}{32} sh 4x - \frac{1}{8} x + C.$

$$2. \int (\operatorname{sh}x - \operatorname{ch}x)^2 dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2} \operatorname{sh}2x - \frac{1}{2} \operatorname{ch}2x + C.$$

$$3. \int \operatorname{sh}(ax) \cos(bx) dx. \quad \text{Ответ: } \frac{a \operatorname{ch}(ax) \cos(bx) + b \operatorname{sh}(ax) \sin(bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

$$4. \int \sqrt{2^x - 1} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{\ln 2} \left(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1} \right) + C \quad (x \geq 0).$$

$$5. \int \frac{2^{2x} - 1}{\sqrt{2^x}} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{\ln 2} \left(\frac{1}{3} 2^{\frac{3x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} \right) + C.$$

$$6. \int \frac{2^{2x-1} - 3^{2x+3}}{6^{2x}} dx. \quad \text{Ответ: } \left(\frac{32}{5} \right)^x \left(\ln \frac{32}{5} \right)^{-1} + C.$$

$$7. \int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx. \quad \text{Ответ: } -2e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 4x + 8) + C.$$

$$8. \int (2x^2 - 2x + 1) e^{-\frac{x}{2}} dx. \quad \text{Ответ: } -2(2x^2 + 6x + 13) e^{-\frac{x}{2}} + C.$$

$$9. \int e^x \sin x dx. \quad \text{Ответ: } \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

$$10. \int e^{2x} \sin^2 x dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \sin 2x - \cos 2x) + C.$$

$$11. \int e^x \cos(e^x) dx. \quad \text{Ответ: } \sin(e^x) + C.$$

$$12. \int x^7 e^{-x^2} dx. \quad \text{Ответ: } -\frac{e^{-x^2}}{2} (x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C.$$

$$13. \int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx. \quad \text{Ответ: } 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2e^x} (\sqrt{1-e^x} - \sqrt{1+e^x}) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(\sqrt{1+e^x} - 1)(\sqrt{1-e^x} - 1)}{(\sqrt{1+e^x} + 1)(\sqrt{1-e^x} + 1)} \right| + C.$$

$$15. \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 4} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

$$16. \int \frac{e^x + e^{2x}}{1 - e^x} dx. \quad \text{Ответ: } -e^x - 2 \ln|e^x - 1| + C \quad (x \neq 0).$$

$$17. \int \frac{2e^{2x} - e^x - 3}{e^{2x} - 2e^x - 3} dx. \quad \text{Ответ: } x + \ln|e^x - 3| + C \quad (x \neq \ln 3).$$

$$18. \int \frac{e^{2x} + 3e^x + 16}{e^{4x} - 16} dx \quad (x \neq \ln 2).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{32} \ln|e^x - 2|^{13} (e^x + 2)^7 + \frac{3}{16} \ln(e^{2x} + 4) - \frac{3}{16} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} - x + C.$$

$$19. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{3}{5} (\ln x)^{\frac{5}{3}} + C \quad (x > 0).$$

$$20. \int \frac{dx}{x \ln x}. \quad \text{Ответ: } \ln|\ln x| + C \quad (x > 0; x \neq 1).$$

$$21. \int \frac{\ln x}{x^2} dx. \quad \text{Ответ: } -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \quad (x > 0).$$

$$22. \int \frac{\ln x}{x^3} dx. \quad \text{Ответ: } -\frac{2 \ln x + 1}{4x^2} + C \quad (x > 0).$$

$$23. \int x \ln^2 x dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{4} x^2 (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C \quad (x > 0).$$

$$24. \int \sqrt{x} \ln^2 x dx. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C \quad (x > 0).$$

$$25. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx. \quad \text{Ответ: } 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C \quad (x > 0).$$

$$26. \int x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx. \quad \text{Ответ: } \frac{x^2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|1 + x| + C \quad (x \notin [-1, 0]).$$

$$27. \int x \ln \frac{x}{1+x^2} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \quad (x > 0).$$

$$28. \int \ln(x^2 + x) dx. \quad \text{Ответ: } x \ln(x^2 + x) + \ln|x + 1| - x + C \quad (x \notin [-1, 0]).$$

$$29. \int x^2 \ln(1+x) dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{x^3}{3} \ln(1+x) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln(1+x) + C \quad (x > -1).$$

$$30. \int \cos^2(\ln x) dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{2} + \frac{x \cos(2 \ln x) + 2x \sin(2 \ln x)}{10} + C \quad (x > 0).$$

$$31. \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx. \quad \text{Ответ: } \operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right).$$

$$32. \int \sin 2x \ln \cos x dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2} \cos^2 x (1 - 2 \ln \cos x) + C \quad (\cos x > 0).$$

$$33. \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 \ln x + x^3}} dx. \quad \text{Ответ: } 2\sqrt{\ln x + x} + C \quad (\ln x + x > 0; x > 0).$$

$$34. \int \frac{\ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C \quad (x > 0).$$

$$35. \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$$

$$\text{Ответ: } x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C \quad (|x| < 1).$$

$$36. \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$37. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx \quad (0 < x < 1).$$

$$\text{Ответ: } -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$38. \int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{2} x - \frac{1}{2} (3+x^2) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + \frac{x^2+1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2) + C.$$

39. $\int x \arcsin x dx$. Ответ: $\frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C$.
40. $\int x \operatorname{arccctg} x dx$. Ответ: $\frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arccctg} x + C$.
41. $\int x^2 \arcsin x dx$. Ответ: $\frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2} + C$ ($|x| \leq 1$).
42. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$. Ответ: $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C$.
43. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx$. Ответ: $\frac{x^2}{2} \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} \cdot \operatorname{sgn} x + C$ ($|x| \geq 1$).
44. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$. Ответ: $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$ ($|x| < 1$).
45. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$. Ответ: $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C$ ($0 < |x| \leq 1$).
46. $\int x^3 \operatorname{arctg}^2 x dx$. Ответ: $\frac{1}{4} x^4 \operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{6} (x^3 - 3x) \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{12} - \frac{1}{3} \ln(1+x^2) + C$.
47. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$. Ответ: $t \cdot \operatorname{tg}^2 t - \operatorname{tg} t + t$, где $t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ ($x > 0$).
48. $\int \frac{\operatorname{arccctg}(3x)}{1+9x^2} dx$. Ответ: $-\frac{1}{6} \operatorname{arccctg}^2(3x) + C$.
49. $\int \frac{x + \arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Ответ: $-\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{5} \arccos^{\frac{5}{2}} x + C$ ($|x| < 1$).
50. $\int \frac{x + \arcsin^3(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.
 Ответ: $-\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{8} \arcsin^4(2x) + C$ ($|x| < \frac{1}{2}$).

$$51. \int \frac{x + \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{8} \ln(1 + 4x^2) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}}(2x) + C \quad (x \geq 0).$$

$$52. \int \frac{\arcsin x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2} (\arcsin^2 x + \arccos^2 x) + C \quad (|x| < 1).$$

$$53. \int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \operatorname{arctg} x dx. \quad \text{Ответ: } x \operatorname{arctg} x - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

$$54. \int \frac{3 + 2x^2}{x^2 + 1} \operatorname{arctg} x dx. \quad \text{Ответ: } 2x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x - \ln(1 + x^2) + C.$$

$$55. \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\text{Ответ: } -\sqrt{1-x^2} \left(\frac{2+x^2}{3} \right) \arccos x - \frac{6x+x^3}{9} + C \quad (|x| < 1).$$

$$56. \int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3} \ln(1+x^2) + C.$$

$$57. \int \frac{\operatorname{arctg} \left(e^{\frac{x}{2}} \right)}{e^{\frac{x}{2}} (1 + e^x)} dx.$$

$$\text{Ответ: } -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{x}{2}} \right) - \left(\operatorname{arctg} \left(e^{\frac{x}{2}} \right) \right)^2 + x - \ln(1 + e^x) + C.$$