

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.	8
----------------------	---

§ 1. Понятие неопределённого интеграла

1.1. Историческая справка.	10
1.2. Понятие первообразной функции и неопределённого интеграла.	14
1.3. Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях.	21
1.4. Основные свойства неопределённого интеграла.	23
1.5. Таблица простейших интегралов.	24
Задачи для самостоятельного решения.	26

§ 2. Основные методы интегрирования

2.1. Интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью простейших преобразований.	27
2.2. Интегрирование путём замены переменной $\int f(t(x))t'(x)dx = \int f(t)dt$	28
2.3. Интегрирование по частям $\int u dv = uv - \int v du$	33

§ 3. Интегрирование рациональных функций

3.1. Интегралы вида $\int \frac{ax + b}{cx + d} dx$ ($ac \neq 0; cx + d \neq 0$)	40
3.2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0$)	41
3.3. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x + a)(x + b)}$ ($a \neq b$)	41

3.4. Интегралы вида	$\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$ ($a \neq b; m, n \in N$)	42
3.5. Интегралы вида	$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ ($a \neq 0$)	44
3.6. Интегралы вида	$\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}$ ($n \in N, n \geq 2; b^2 - 4c < 0$)	45
3.7. Интегралы вида	$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+bx+c)^n}$ ($n \in N, n \geq 2; b^2 - 4c < 0$)	47
3.8. Метод алгебраических преобразований		48
3.9. Представление рациональных дробей суммой простейших дробей с использованием метода неопределённых коэффициентов		52
3.10. Метод М.В.Остроградского	$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$	61
Задачи для самостоятельного решения		65

§ 4. Интегрирование иррациональных функций

4.1. Интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей		
4.1.1. Интегралы вида	$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx, \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	68
4.1.2. Интегралы	$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx$	70
4.2. Интегрирование квадратичных иррациональностей		
	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ ($a \neq 0$)	72
4.2.1. Интегралы вида	$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$	72
4.2.2. Интегралы вида	$\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c} \cdot dx$	74
4.2.3. Интегралы вида	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	75
4.2.4. Интегралы вида	$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	76

4.2.5. Интегралы вида	$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	77
4.2.6. Интегралы вида	$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ($n \in \mathbb{N}$)	78
4.2.7. Интегралы вида	$\int \frac{dx}{(x^2 + a)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}}$ ($n \in \mathbb{Z}$)	81
4.2.8. Интегралы вида	$\int \frac{x dx}{(x^2 + a)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}}$ ($n \in \mathbb{Z}$)	82
4.2.9. Интегралы вида	$\int \frac{(Ax + B)dx}{(x^2 + px + q)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$	83
4.2.10. Интегралы вида	$\int \frac{R(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	89
4.2.11. Интегралы вида	$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, а также $\int R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right) dx$ ($a > 0$)	91
4.2.12. Интегралы вида	$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$	93
4.2.13. Интегралы вида	$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, а также $\int R\left(x, \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\right) dx$ ($a > 0$)	95
4.2.14. 1-я подстановка Эйлера	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$ ($a > 0$) ..	99
4.2.15. 2-я подстановка Эйлера	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ ($c > 0$) ..	101
4.2.16. 3-я подстановка Эйлера	$\sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)} = t(x - \lambda)$	102
4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов	$\int x^m (a + bx^n)^p dx$	104
4.4. Умножение на сопряжённое выражение, нестандартные подстановки и другие преобразования	107
Задачи для самостоятельного решения.	111

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

- 5.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция. 118
- 5.1.1. Метод универсальной подстановки. 118
- 5.1.2. Случай, когда $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ 119
- 5.1.3. Случай, когда $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ 121
- 5.1.4. Случай, когда $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ 121
- 5.2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ($n, m \in \mathbb{Z}$). 123
- 5.2.1. Интегралы вида $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$). 123
- 5.2.2. Случай, когда n и m – положительные чётные числа. 125
- 5.2.3. Случай, когда n или m – натуральное нечётное число. 126
- 5.2.4. Случай, когда n и m – целые отрицательные числа одной чётности. 127
- 5.2.5. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin^n x}$, $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ ($n \in \mathbb{N}$). 128
- 5.2.6. Случай, когда n и m – целые отрицательные числа, причём одно из них нечётное. 131
- 5.2.7. Случай, когда один из показателей – чётный, а другой – целый отрицательный. 131
- 5.2.8. Случай, когда один из показателей – нечётный, а другой – целый отрицательный. 132
- 5.3. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bxdx$, $\int \sin ax \sin bxdx$,
 $\int \cos ax \cos bxdx$, а также $\int \sin ax \cdot \sin bx \cdot \sin cxdx$ 133
- 5.4. Интегралы вида $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$). 134
- 5.5. Интегралы вида $\int tg^n x \cdot \frac{dx}{\cos^m x}$, $\int ctg^n x \cdot \frac{dx}{\sin^m x}$, где $n \in \mathbb{R}$,
 m – чётное натуральное число. 135
- 5.6. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$, $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$. . . 135
- 5.7. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x}$ 138
- 5.8. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$,

$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} (a \neq b)$	138
5.9. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$, $\int \frac{dx}{\cos x - \cos a}$, $\int \frac{dx}{\sin x - \cos a}$	140
5.10. Интегралы вида $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$, $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx$, $\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx$ и другие.....	143
5.11. Интегрирование по частям.....	147
5.12. Другие подстановки и подходы к интегрированию.....	148
Задачи для самостоятельного решения.....	152
§ 6. Интегрирование выражений, содержащих гиперболические, показательные, логарифмические и другие трансцендентные функции	
6.1. Интегрирование гиперболических функций.....	158
6.2. Интегрирование показательных функций.....	163
6.3. Интегрирование логарифмических функций.....	166
6.4. Интегрирование обратных тригонометрических функций.....	170
Задачи для самостоятельного решения.....	174
Список использованной литературы	180