ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ВВОДНАЯ ГЛАВА

ГРУППЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Непрерывные группы

1.1. Топологические группы. Топологическое пространство G с заданной в нем групповой операцией $\cdot$ называется *топологической группой*, если отображение $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ (b^{-1} — обратный к b элемент в группе G) пространства-произведения $G \times G$ в пространство G непрерывно.

При изучении локальных свойств топологических групп можно ограничиться рассмотрением окрестности единицы группы G, так как для любого фиксированного элемента $a \in G$ отображение $x \mapsto x \cdot a^{-1}$ задает гомеоморфизм топологического пространства G на себя и переводит элемент a в единицу группы G.

Множество $H \subset G$ называется *подгруппой* топологической группы G, если оно является замкнутым множеством топологического пространства G и подгруппой группы G. Если при этом H — инвариантная подгруппа группы G ($a^{-1} \cdot H \cdot a = H$ для каждого элемента a из G), то H называется *инвариантной*, или *нормальной*, подгруппой топологической группы G. Пусть H — инвариантная подгруппа топологической группы G и G/H — семейство всех взаимно непересекающихся множеств вида $H \cdot a$, $a \in G$. В G/H естественным путем вводятся топология и групповая операция, индуцированные топологией и групповой операцией в G. В результате получается топологическая группа G/H, называемая *факторгруппой* топологической группы G по ее инвариантной подгруппе H.

Отображение f: $G \to G'$ называется *изоморфизмом* топологической группы G на топологическую группу G', если f — изоморфизм группы G на группу G' и гомеоморфизм топологического пространства G на топологическое пространство G'. Если отображение f непрерывно и является гомоморфизмом группы G в группу G', то оно называется *гомоморфизмом* топологической группы G в топологическую группу G'.

1.2. Группы Ли. Пусть M — связное хаусдорфово топологическое пространство, $U \subset M$ — открытое множество, а φ — гомео-

морфизм U на открытое множество пространства $\mathbb{R}^m$. Пара (U, φ) называется (m-мерной) *картой* на M, множество U — *областью* этой карты, и функции $\varphi^i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$: $U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ называются *локальными координатами*. Символом pr_i обозначена здесь проекция на i-ю координатную ось в $\mathbb{R}^m$: если $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$, то $\mathrm{pr}_i(x) = x^i$. Для любой точки $a \in U$ набор $(\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ называют *системой локальных координат* в точке a, а вещественные числа $x^i = \varphi^i(a)$ — координатами точки a в указанной системе координат. Система локальных координат будет обозначаться также символом $\{x^i\}$.

Топологическое пространство M называется m-мерным (топологическим) *многообразием*, если на M существует семейство карт, области которых покрывают M. Если (U, φ) — карта на M, а $V \subset U$ — открытое множество, то сужение $\varphi|_V$ будет гомеоморфизмом V на открытое множество в $\mathbb{R}^m$; поэтому $(V, \varphi|_V)$ является картой на M и называется *сужением* карты (U, φ) на V.

Возможность использования аналитического аппарата на многообразиях достигается путем введения дифференцируемой структуры, определяемой следующим образом. Карты (U, φ) и (U, ψ) на многообразии M, имеющие одну и ту же область, называются *C^p-согласованными*, если отображения $\psi \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U) \to \psi(U)$ и $\varphi \circ \psi^{-1}$: $\psi(U) \to \varphi(U)$ p раз непрерывно дифференцируемы. Две произвольно взятые карты (U, φ) и (V, ψ) на M называются *C^p-согласованными*, если их сужения на $U \cap V$ C^p-согласованы или пересечение областей этих карт пусто. *Атлас* класса C^p m-мерного многообразия M — это семейство $\mathcal{A}$ попарно C^p-согласованных карт на M, области которых покрывают M. Два атласа $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ класса C^p называются *эквивалентными*, если $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ является атласом класса C^p. *Дифференцируемой структурой* класса C^p (p — целое положительное число или ∞) на многообразии M называется семейство всех эквивалентных атласов класса C^p многообразия M. Равносильным путем можно определить дифференцируемую структуру как максимальный атлас многообразия; таким максимальным атласом является объединение всех атласов рассматриваемого класса эквивалентных между собой атласов.

Многообразие M с заданной на нем дифференцируемой структурой класса C^p называется m-мерным *дифференцируемым многообразием* класса C^p. Для того чтобы получить дифференцируемое многообразие, достаточно задать любой из эквивалентных атласов рассматриваемого многообразия. Заменой (в определении атласа) функций класса C^p аналитическими функциями получают определение m-мерного аналитического многообразия. В дальнейшем, когда нет специальных оговорок, считается, что все рассматриваемые многообразия наделены дифференцируемой структурой класса C^∞.

Пусть M и N — дифференцируемые многообразия размерностей m и n соответственно. Непрерывное отображение f: $M \to N$ на-

зывается *p раз непрерывно дифференцируемым*, если для любых карт (U, φ) и (V, ψ) на M и N соответственно, области которых удовлетворяют условию $f(U) \subset V$, локальное изображение f, т. е. отображение $\psi \circ (f|_U) \circ \varphi^{-1}$ открытого множества $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ в открытое множество $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, p раз непрерывно дифференцируемо. Если M, N — аналитические многообразия и локальное изображение f аналитично, то отображение f называется *аналитическим*. В случае $N = \mathbb{R}$ отображение f называется также (вещественной) *функцией*, определенной на многообразии M. Указанные понятия формулируются аналогичным образом и для отображений, определенных локально, т. е. заданных на некотором открытом множестве многообразия M.

Кривой в многообразии M, проходящей через точку $x \in M$, называется непрерывно дифференцируемое отображение γ: $I \to M$, где I — открытый интервал на вещественной прямой $\mathbb{R}$, содержащий точку 0, причем $\gamma(0) = x$. Говорят, что кривые γ_1 и γ_2, проходящие через точку $x \in M$, касаются друг друга в этой точке, если производные локальных изображений γ_1 и γ_2 в точке 0 совпадают. Понятие касания кривых в точке не зависит от выбора карты и задает соотношение эквивалентности между кривыми, проходящими через одну и ту же точку многообразия. Семейство всех кривых, касательных к кривой γ в точке $x \in M$, называется *касательным вектором* к M в точке x и обозначается символом $[\gamma]_x$. Касательный вектор $[\gamma]_x$ можно отождествить с производной $\gamma'(0)$ локального изображения кривой γ в точке 0; поэтому вместо $[\gamma]_x$ используется также обозначение $\gamma'(0)$. Множество всех касательных векторов в точке x называется *касательным пространством* к M в точке x и обозначается M_x. Если многообразие M имеет размерность m, то на касательном пространстве вводится структура m-мерного пространства, индуцированная дифференцируемой структурой многообразия M. Для этого выбирают некоторую карту (U, φ) в окрестности точки x, так что $x \in U$, и определяют отображение θ: $M_x \to \mathbb{R}^m$, сопоставляя каждому касательному вектору $[\gamma]_x \in M_x$ производную в точке 0 локального изображения $\varphi \circ \gamma$ кривой γ. Отображение θ является взаимно однозначным и позволяет ввести на M_x требуемую структуру векторного пространства. А именно, сумму касательных векторов $[\gamma_1]_x$, $[\gamma_2]_x$ и произведение на вещественное число λ можно определить формулами

$$[\gamma_1]_x + [\gamma_2]_x = \theta^{-1}(h_1 + h_2), \qquad \lambda[\gamma]_x = \theta^{-1}(\lambda h),$$

где $h_i = \theta([\gamma_i]_x)$, $i = 1, 2$.

Дуальное к M_x пространство M_x^*, представляющее собой m-мерное векторное пространство линейных отображений пространства M_x в $\mathbb{R}$, называется *кокасательным пространством* к M в точке x. Тензоры в точке $x \in M$ определяются как аффинные тензоры над векторным пространством M_x, т. е. как веществен-

ные полилинейные отображения, определенные на произведении касательных и кокасательных пространств к многообразию M в точке x. А именно, тензором, контравариантным порядка r и ковариантным порядка s, или просто *тензором типа* $\binom{r}{s}$, определенным в точке $x \in M$, называется полилинейное отображение из произведения $\underbrace{M_x^* \times \ldots \times M_x^*}_{r} \times \underbrace{M_x \times \ldots \times M_x}_{s}$ в $\mathbb{R}$. Тензорное поле типа $\binom{r}{s}$ на многообразии M задается путем сопоставления каждой точке многообразия тензора указанного типа, определенного в этой точке. В частности, используя изоморфизм между пространствами $(M_x^*)^*$ и M_x, векторное поле ξ на многообразии M может быть определено как гладкое отображение $x \mapsto \xi(x) \in M_x$, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ однозначно определенный касательный вектор к M в точке x.

Аналитическое многообразие G с определенной на нем групповой операцией $\cdot$ называется *группой Ли*, если отображение $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ многообразия-произведения $G \times G$ на многообразие G аналитично.

1.3. Локальные группы. Топологическое пространство G называется *локальной группой*, если существуют элемент (единица) $e \in G$ и такие окрестности U, V (причем $V \subset U$) элемента e, что на произведении $U \times U$ определено отображение (локальная групповая операция на U) $\cdot : U \times U \to U$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $V \cdot V \subset U$;
2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех a, b, $c \in V$;
3) $e \cdot a = a \cdot e = a$ для всех $a \in U$;
4) для любого $a \in V$ существует (обратный) элемент $a^{-1} \in U$, такой, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$;
5) отображение $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ непрерывно на $U \times V$.

Окрестности U и V, фигурирующие выше, не определяются однозначно: вместо U и V можно взять соответственным образом подобранные меньшие окрестности $U' \subset U$, $V' \subset V$. Этот произвол в определении локальной группы обеспечивает необходимую в локальных вопросах общность вводимого понятия и расширяет область применимости теоретико-групповых методов. Согласно приведенному определению, каждая топологическая группа является также локальной группой.

Замкнутое подмножество H локальной группы G, содержащее единицу $e \in G$, называется *подгруппой* локальной группы G, если оно является локальной группой относительно локальной групповой операции в G. Если при этом найдется такая открытая окрестность $U \subset G$ единицы, что $a^{-1} \cdot b \cdot a \in H$ для всех элементов $a \in U$ и $b \in U \cap H$, то H называется *инвариантной подгруппой* локальной группы G. Факторгруппа G/H локальной группы G по ее инвариантной подгруппе H строится как и в случае

топологических групп, с тем отличием, что теперь в качестве элементов G/H берутся смежные классы по H элементов из некоторой окрестности единицы локальной группы G.

В множестве локальных групп вводится отношение эквивалентности с помощью понятия локального изоморфизма, определяемого следующим путем. Пусть G и G' — две локальные группы, e и e' — их единицы, а окрестности U, V и U', V' элементов e и e' соответственно выбраны так, что для них выполняются аксиомы 1)—5). Пусть f: $U \to U'$ — такой гомеоморфизм, что $f(V) \subset V'$ и для всех a, $b \in V$ выполняется условие $f(a, b) = f(a) \cdot f(b)$. Тогда отображение f называется *локальным изоморфизмом*, а сами группы G и G' — *локально изоморфными*. Обратное отображение f^{-1} (или, возможно, его сужение на некоторую окрестность элемента e') также является локальным изоморфизмом. Локальный изоморфизм также удовлетворяет обычным свойствам изоморфизма групп: $f(e) = e'$, $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ для любого элемента $a \in V$.

1.4. Локальные группы Ли. Пусть G — локальная группа, (U, φ) — такая r-мерная карта на G, что $e \in U$, и на U определена локальная групповая операция, заданная в G, причем гомеоморфизм φ удовлетворяет условию $\varphi(e) = 0$. Пусть, далее, открытое множество $V \subset U$ выбрано так, что U и V удовлетворяют условиям 1)—5), § 1.6. Если при этом отображение $(a, b) \mapsto a \cdot b$ произведения $V \times V$ в U является аналитическим, то говорят, что в локальной группе G введены аналитические координаты. Другими словами, это означает, что координаты c^i $(i = 1, \ldots, r)$ элемента $c = a \cdot b \in U$ в локальной карте (U, φ) являются аналитическими функциями $c^i = \psi^i(a^1, \ldots, a^r, b^1, \ldots, b^r)$ координат a^i, b^i элементов a, $b \in V$ в локальной карте $(V, \varphi|_V)$.

Локальная группа G, в которой введены аналитические координаты, называется *локальной группой Ли*. Если при этом, как выше, размерность системы локальных координат равна r, то G называют *r-мерной локальной группой Ли* и обозначают G_r. Всякая группа Ли, как легко заметить, является одновременно и локальной группой Ли.

Локальная группа Ли G_r называется *разрешимой*, если существует ряд $G_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset G_1$ подгрупп размерностей r, $r-1, \ldots, 1$, такой, что каждая подгруппа G_{s-1} $(s = 2, \ldots, r)$ является инвариантной подгруппой в локальной группе Ли G_s. Группа G_r называется *простой*, если она не содержит инвариантных подгрупп, отличных от G_r и $\{e\}$, и *полупростой*, если она не содержит разрешимых инвариантных подгрупп, отличных от $\{e\}$.

Изучение структуры локальных групп Ли и их применение основываются на возможности описания локальной группы Ли в терминах ее алгебры Ли, представляющей собой более простой алгебраический объект.