§ 2. Алгебры Ли

2.1. Определения. *Алгеброй Ли* называется векторное пространство*) L с умножением (билинейным отображением $(\xi_1, \xi_2) \mapsto [\xi_1, \xi_2]$ произведения $L \times L$ в L), которое антисимметрично

$$[\xi_1, \xi_2] + [\xi_2, \xi_1] = 0$$

и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0$$

для всех $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in L$. Произведение $[\xi_1, \xi_2]$ называется *коммутатором* векторов ξ_1 и ξ_2. Любое векторное пространство можно превратить в алгебру Ли. Если, например, определить умножение, полагая $[\xi_1, \xi_2] = 0$ для всех векторов ξ_1, ξ_2 рассматриваемого пространства, то получается алгебра Ли, называемая *коммутативной*, или *абелевой*. *Размерностью* алгебры Ли L называется размерность векторного пространства L. Алгебра L размерности r будет обозначаться также символом L_r.

Пусть L_r — алгебра Ли, $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — базис соответствующего векторного пространства L_r. Разложение коммутатора любой пары базисных векторов по этому базису имеет вид**)

$$[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k,$$

где $c_{ij}^k (i, j, k = 1, \ldots, r)$ — вещественные числа. Числа c_{ij}^k называются *структурными константами* (в данном базисе) алгебры L_r и образуют аффинный тензор над векторным пространством L_r. Антисимметричность коммутатора и тождества Якоби накладывают следующие условия на структурные константы:

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0, \qquad c_{im}^k c_{jn}^m + c_{jm}^k c_{ni}^m + c_{nm}^k c_{ij}^m = 0.$$

Линейное отображение f: $L \to K$ называется *гомоморфизмом* алгебры L в алгебру K, если для всех векторов ξ, ξ' из L выполняется равенство $f([\xi, \xi']) = [f(\xi), f(\xi')]$. Множество $f^{-1}(0)$ всех векторов из L, которые при гомоморфизме f переходят в нулевой вектор пространства K, называется *ядром гомоморфизма* f. Если f отображает L на K и $f^{-1}(0) = 0$, то гомоморфизм f называется *изоморфизмом*, а алгебры L и K — *изоморфными*. Изоморфизм алгебры L на себя называется *автоморфизмом*.

Пусть L — алгебра Ли, K и N — подпространства векторного пространства L, а $K \cap N$ обозначает их пересечение. Суммой подпространств K, N называется подпространство $K + N$, состоящее

---

*) Ниже рассматриваются вещественные алгебры Ли, так что речь идет о векторных пространствах над полем вещественных чисел.

**) Здесь и всюду в дальнейшем, когда нет специальных оговорок, используется обычное правило суммирования по индексам, повторяющимся как верхний и нижний, причем число соответствующих слагаемых бывает известно из контекста.

из всех векторов вида $\eta+\zeta$ ($\eta\in K$, $\zeta\in N$), а их произведением $[K, N]$ — линейная оболочка всех коммутаторов $[\eta, \zeta]$ ($\eta\in K$, $\zeta\in N$). Если $K\cap N=0$, то $K+N$ называется прямой суммой подпространств K, N.

Подпространство K пространства L называется подалгеброй алгебры Ли L, если $[K, K]\subset K$, и идеалом этой алгебры, если $[K, L]\subset K$.

Если K, N — идеалы алгебры L, то пересечение $K\cap N$, произведение $[K, N]$ и сумма $K+N$ подпространств K, N векторного пространства L также являются идеалами алгебры L, причем $[K, N]\subset K\cap N$. Если $K\cap N=0$, то $[K, N]=0$; при этом идеал $K+N$ называется прямой суммой идеалов K, N алгебры L и обозначается символом $K\oplus N$. Если в алгебре L существуют такие идеалы K, N, что $L=K\oplus N$, то алгебра L называется разложимой в прямую сумму своих подалгебр K и N. Пусть теперь K — идеал, а N — подалгебра алгебры L, причем $K\cap N=0$; тогда прямая сумма $K+N$ подпространств K, N пространства L является подалгеброй алгебры L и называется полупрямой суммой подалгебр K и N алгебры L. Если при этом $L=K+N$, то говорят, что алгебра L является полупрямой суммой своих подалгебр K и N.

Пусть K — идеал алгебры L. Семейство L/K попарно непересекающихся смежных классов $\xi+K$ ($\xi\in L$) естественно снабжается структурой алгебры Ли. Полученная алгебра L/K называется факторалгеброй алгебры L по идеалу K, а гомоморфизм $\xi\mapsto\xi+K$ алгебры L на алгебру L/K — естественным, или каноническим, гомоморфизмом; ядром этого гомоморфизма является идеал K. Сама алгебра L называется при этом расширением алгебры L/K с помощью K.

Алгебра Ли $L^{(1)}=[L, L]$ называется производной алгеброй алгебры Ли L. По построению, $L^{(1)}$ является идеалом в L. Производные алгебры более высокого порядка определяются рекуррентно: $L^{(n+1)}=(L^{(n)})^{(1)}$, $n=1, 2, \ldots$

Алгебра L называется *разрешимой*, если $L^{(n)}=0$ для некоторого $n>0$. Простейшим примером разрешимой алгебры является коммутативная алгебра Ли. Разрешимы также все одномерные и двумерные алгебры Ли. Подалгебра и гомоморфный образ любой разрешимой алгебры, очевидно, разрешимы; в частности, разрешима факторалгебра разрешимой алгебры по любому ее идеалу. Кроме того, если идеал K алгебры L и факторалгебра L/K разрешимы, то сама алгебра L также разрешима. Действительно, если $K^{(n)}=0$, $(L/K)^{(m)}=0$ для некоторых положительных n, m, а f: $L\to L/K$ — естественный гомоморфизм, то $f(L^{(m)})=(f(L))^{(m)}=(L/K)^{(m)}=0$, откуда следует, что $L^{(m)}\subset K$ и $L^{(n+m)}=0$.

Пусть K, N — разрешимые идеалы алгебры L_r. Факторалгебра $(K+N)/N$ изоморфна разрешимой алгебре $K/(K\cap N)$ и, значит, разрешима. Поэтому идеал $K+N$ разрешим как расширение

разрешимой алгебры $(K+N)/N$ с помощью разрешимой алгебры N. Отсюда следует, что разрешимый идеал R максимальной размерности в конечномерной алгебре Ли L_r является единственным и содержит все разрешимые идеалы алгебры L_r. Этот максимальный разрешимый идеал R называется *радикалом* алгебры L_r.

Алгебра Ли L_r разрешима тогда и только тогда, когда существует ряд

$$L_r \supset L_{r-1} \supset \ldots \supset L_1 \tag{2.1}$$

подалгебр размерностей r, $r-1$, ..., 1 соответственно, в котором каждая подалгебра L_{s-1} является идеалом в L_s $(s=2, \ldots, r)$. Разрешимость алгебры L_r, для которой существует ряд (2.1), следует из соотношений

$$L_r^{(r)} = (L_r^{(1)})^{(r-1)} \subset L_{r-1}^{(r-1)} \subset \ldots \subset L_1^{(1)} = 0.$$

Пусть теперь алгебра L_r разрешима и $L_r^{(n)}=0$, $n>0$. Рассматривая ряд последовательных производных

$$L_r^{(1)} \supset L_r^{(2)} \supset \ldots \supset L_r^{(n)}, \tag{2.2}$$

легко видеть, что для любого $\nu=1, \ldots, n$ всякое подпространство в $L_r^{(\nu-1)}$, содержащее $L_r^{(\nu)}$, является идеалом в $L_r^{(\nu-1)}$. Отсюда ясно, как можно достроить ряд (2.2) до требуемого ряда (2.1).

Некоммутативная алгебра Ли L называется *простой*, если она не имеет идеалов, отличных от 0 и L. Примером простой алгебры может служить алгебра Ли группы вращений в $\mathbb{R}^3$; она представляет собой такую трехмерную алгебру L, производная алгебра $L^{(1)}$ которой совпадает с ней самой. Это свойство и обеспечивает простоту алгебры L: если бы в L существовал идеал K, отличный от 0 и L, то алгебры K и L/K, имея размерности один или два, были бы разрешимы, и, значит, была бы разрешима алгебра L, что противоречит условию $L^{(1)}=L$. Отсюда видно также, что любая трехмерная алгебра Ли или проста, или разрешима.

Алгебра Ли называется *полупростой*, если ее радикал равен нулю. Заметим, что всякий коммутативный идеал разрешим. С другой стороны, алгебра L, содержащая ненулевой разрешимый идеал K, содержит также ненулевой коммутативный идеал — им является предпоследний элемент последовательности производных: K, $K^{(1)}$, ..., $K^{(n-1)}$, $K^{(n)}=0$. Поэтому алгебра Ли полупроста в том и только том случае, если она не имеет отличных от нуля коммутативных идеалов.

Всякая простая алгебра Л и полупроста. Полупростой будет также любая конечномерная алгебра L, распадающаяся в прямую сумму

$$L = K \oplus \ldots \oplus N \tag{2.3}$$

своих идеалов K, ..., N, являющихся простыми алгебрами. Более

того, такими алгебрами L исчерпывается весь класс конечномерных полупростых алгебр Ли. А именно, для каждой конечномерной полупростой алгебры L существует разложение (2.3) в прямую сумму своих простых идеалов, причем это разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Для практического использования удобен критерий Картана полупростоты конечномерных алгебр Ли. В координатной форме этот критерий состоит в следующем:

Алгебра L_r со структурными константами c_{ij}^k полупроста тогда и только тогда, когда

$$\det [g_{ij}] \neq 0,$$

где $[g_{ij}]$ — матрица с элементами $g_{ij} = c_{im}^k c_{jk}^m$ $(i, j = 1, \ldots, r)$.

Задача нахождения радикала данной алгебры Ли сводится к выяснению свойства полупростоты соответствующей факторалгебры. Действительно, всякий разрешимый идеал в факторалгебре L/R конечномерной алгебры L по любому ее разрешимому идеалу R имеет вид K/R, где K — разрешимый идеал в L, содержащий R. Поэтому разрешимый идеал R алгебры Ли L является ее радикалом тогда и только тогда, когда факторалгебра L/R полупроста.

2.2. Алгебры Ли и локальные группы Ли. Центральное место в теории групп Ли занимает соответствие между группами и алгебрами Ли. Каждой r-мерной группе Ли G_r сопоставляется r-мерная алгебра Ли L_r, представляющая собой совокупность векторных полей (с естественным определением их коммутатора) на многообразии G_r, инвариантных относительно левых (или, равносильно, правых) сдвигов группы G_r. С другой стороны, каждая конечномерная алгебра Ли изоморфна алгебре Ли некоторой группы Ли.

Это соответствие продолжается на структурные свойства групп и алгебр Ли. Если L_r — алгебра Ли группы G_r, то подгруппе, инвариантной подгруппе и факторгруппе группы G_r, соответствуют подалгебра, идеал и факторалгебра алгебры L_r. Отсюда следует, что алгебра Ли разрешимой (соответственно простой или полупростой) группы Ли является также разрешимой (соответственно простой или полупростой). При этом разложению алгебры L_r в прямую (полупрямую) сумму своих подалгебр отвечает представление группы G_r в виде прямого (полупрямого) произведения своих подгрупп, т. е. в виде $G_r = \mathcal{K} \cdot \mathcal{N}$, где $\mathcal{K}$ и $\mathcal{N}$ — инвариантные подгруппы ($\mathcal{K}$ — подгруппа, а $\mathcal{N}$ — инвариантная подгруппа) группы G_r, причем $\mathcal{K} \cap \mathcal{N} = e$.

Процесс восстановления (с точностью до локального изоморфизма) локальной группы Ли G по ее алгебре Ли L конструктивно осуществляется с помощью уравнения Ли и определяемого им экспоненциального отображения exp: $L \longrightarrow G$. Соответствующая процедура кратко может быть описана следующим образом

(за подробностями можно обратиться, например, к монографиям Понтрягина [1], §§ 42, 56, и Шевалле [1], § VIII).

Кривая $g(t) \subset G$ $(t \in I \subset \mathbb{R})$, проходящая через единицу e локальной группы Ли G, называется *однопараметрической подгруппой* группы G, если отображение $g\colon I \to G$ является локальным гомоморфизмом аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел в локальную группу G. Другими словами, однопараметрическая подгруппа группы G — это ее одномерная подгруппа, параметризованная так, что выполняются условия

$$g(t) \cdot g(s) = g(t+s), \qquad g(0) = e. \tag{2.4}$$

Для любого $\xi \in L$ уравнение Ли позволяет построить такую однопараметрическую подгруппу $g(t) \subset G$, что касательный вектор $[g]_e$ к G в точке e, определяемый кривой g, совпадает с заданным вектором ξ, т. е. $g'(0) = \xi$. Уравнение Ли представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными данными, и локальная теорема существования и единственности решения дифференциальных уравнений обеспечивает существование и однозначную определенность указанной однопараметрической подгруппы $g(t)$, а также обусловливает ее локальный характер. Совокупность однопараметрических подгрупп, построенных для всех векторов $\xi \in L$, образует локальную группу Ли, локально изоморфную исходной группе G и поэтому отождествляемую с ней.

Пусть $g(t, \xi)$ — однопараметрическая подгруппа (с групповым параметром t), соответствующая в указанном выше построении вектору ξ из алгебры L. Используя специфику уравнения Ли, можно показать, что

$$g(t, \xi) = g(1, t\xi)$$

тождественно по t. Из этого равенства с учетом (2.4) следует, что отображение $\exp\colon L \to G$, определяемое формулой

$$\exp(\xi) = g(1, \xi)$$

и называемое *экспоненциальным* отображением, обладает обычными свойствами экспоненты:

$$\exp(t\xi) \cdot \exp(s\xi) = \exp[(t+s)\xi], \quad \exp(-t\xi) = (\exp(t\xi))^{-1},$$

где $t, s \in \mathbb{R}$. С помощью экспоненциального отображения однопараметрическая подгруппа с касательным вектором ξ записывается в виде $\exp(t\xi)$.

2.3. Внутренние автоморфизмы. Пусть G — локальная группа Ли, L — ее алгебра Ли. Каждый элемент $a \in G$ определяет внутренний автоморфизм $f_a\colon x \mapsto axa^{-1}$ группы G, а множество всех f_a образует локальную группу Ли — группу внутренних автоморфизмов $\operatorname{Int} G$ группы G. Поскольку всякому автоморфизму группы G соответствует некоторый автоморфизм алгебры L, то группе

Int G соответствует локальная группа Ли автоморфизмов алгебры L. Эта группа локально изоморфна группе Int G; она называется *группой внутренних автоморфизмов* алгебры L, или *присоединенной группой* группы G, и обозначается G^A.

Алгеброй Ли группы G^A является присоединенная алгебра L^A алгебры L, определяемая следующим образом. Пусть ξ — произвольный элемент алгебры L. Линейное отображение $\operatorname{ad}\xi$: $\eta \mapsto [\xi, \eta]$ является автоморфизмом алгебры L и называется *присоединенным к* ξ *отображением*, или *внутренним дифференцированием*, алгебры Ли L. Множество всех внутренних дифференцирований $\operatorname{ad}\xi$ ($\xi \in L$) образует алгебру Ли с коммутатором $[\operatorname{ad}\xi, \operatorname{ad}\eta] = \operatorname{ad}[\xi, \eta]$. Эта алгебра называется *присоединенной алгеброй* L^A для алгебры L. Присоединенная алгебра L^A является алгеброй Ли присоединенной группы G^A.

Две подгруппы H и H' группы G подобны, если существует такой внутренний автоморфизм группы G, который переводит H в H'. Соотношение подобия разбивает множество всех подгрупп группы G на непересекающиеся семейства подобных подгрупп. В этом разбиении возьмем семейства подгрупп одинаковой размерности s и выберем по одному представителю из каждого семейства. Полученное множество неподобных друг другу подгрупп группы G, описывающее совокупность всех ее s-мерных подгрупп с точностью до подобия, называется *оптимальной системой* s-мерных подгрупп группы G. Соответствие между подгруппами группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли сводит задачу описания подгрупп группы G к описанию подалгебр алгебры L. При этом подобие подалгебр определяется с помощью преобразований присоединенной группы G^A: две подалгебры подобны, если найдется преобразование из G^A, переводящее одну из этих подалгебр в другую. Оптимальной системе s-мерных подгрупп будет соответствовать совокупность неподобных друг другу s-мерных подалгебр, которая также называется *оптимальной системой* (порядка s) и обозначается θ_s.

В групповом анализе дифференциальных уравнений к вопросу об описании неподобных подгрупп приводит, например, задача классификации инвариантных и частично инвариантных решений (Овсянников [2]). При этом бывает важно не только выяснить общие свойства решений, но и построить их в более или менее «явном» виде, для чего в первую очередь необходимо найти оптимальные системы подалгебр рассматриваемой конкретной алгебры Ли. Как правило, построение оптимальной системы θ_1 легко осуществляется простым подбором подходящих преобразований из присоединенной группы, как это будет показано в § 5.3. Построение оптимальных систем более высокого порядка достаточно просто реализовать для разрешимых алгебр. В этом случае оптимальная система θ_{s+1} ($s \geqslant 1$) может быть получена путем расширения элементов из θ_s до $(s+1)$-мерных подалгебр (с после-

дующим исключением подобных подалгебр), так как согласно § 2.1 любая $(s+1)$-мерная подалгебра разрешимой алгебры содержит s-мерную подалгебру. Это же замечание справедливо также в случае построения разрешимых (например, двумерных) подалгебр произвольной алгебры Ли. Для классификации подалгебр размерности больше двух в случае неразрешимых алгебр с успехом может быть использована теорема Леви—Мальцева о существовании и единственности (с точностью до подобия) разложения произвольной конечномерной алгебры Ли в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры. В большинстве случаев, встречающихся в практике группового анализа дифференциальных уравнений, применение этой теоремы позволяет полностью реализовать необходимую классификацию подалгебр.

2.4. Теорема Леви — Мальцева. Теорема Леви *) (теорема существования) утверждает, что всякая конечномерная алгебра Ли L разлагается в полупрямую сумму своего радикала R и полупростой подалгебры N:

$$L = R + N. \tag{2.5}$$

Если L—алгебра Ли локальной группы Ли G, то теорема Леви дает представление группы G в виде полупрямого произведения

$$G = \mathcal{R} \cdot \mathcal{N}. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathcal{R}$—максимальная разрешимая инвариантная подгруппа в G, соответствующая радикалу R алгебры L и называемая также радикалом группы G, а $\mathcal{N}$—полупростая подгруппа группы G, соответствующая подалгебре N алгебры L. Каждое из представлений (2.5) и (2.6) алгебры L и группы G называется *разложением Леви*, а подалгебра N и подгруппа $\mathcal{N}$—*подалгеброй* и *подгруппой Леви* соответственно.

В отличие от радикала подалгебра Леви не определяется однозначно. Однако все подалгебры Леви данной алгебры Ли подобны, и, следовательно, с точностью до подобия разложение Леви единственно. Это обеспечивает теорема Мальцева [1] (теорема единственности):

Пусть R—радикал конечномерной алгебры L и

$$L = R + N = R + N' \tag{2.7}$$

—два разложения Леви. Тогда найдется такой элемент ξ из R, что N' переводится в N внутренним автоморфизмом $\exp(\operatorname{ad}\xi)$.

Дальнейшее уточнение совокупности внутренних автоморфизмов, достаточной для преобразования друг в друга различных подалгебр Леви, содержится в работе Harish-Chandra [1] (см. также

*) В своем доказательстве Levi [1] опирается на классификацию Картана полупростых групп. Другое доказательство, не зависящее от этой классификации и справедливое как для комплексных, так и для вещественных алгебр, дал Whitehead [1]; его метод использован также в работе Мальцева [1].

Бурбаки [1], гл. 1, § 6, п° 8). А именно, в теореме Мальцева достаточно ограничиться рассмотрением специальных автоморфизмов — внутренних автоморфизмов $\exp(\operatorname{ad}\xi)$, порожденных элементами ξ из нильпотентного радикала алгебры L.

Пусть дано разложение Леви (2.6) группы G. Из теоремы Мальцева следует, что всякая полупростая подгруппа группы G подобна некоторой подгруппе из $\mathcal{N}$. Поэтому для классификации полупростых подгрупп группы G достаточно перечислить все неподобные подгруппы из $\mathcal{N}$. Следующее простое следствие теоремы Мальцева показывает, что при этом $\mathcal{N}$ можно рассматривать независимо от исходной группы G и использовать только внутренние автоморфизмы группы $\mathcal{N}$: если две подгруппы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ из $\mathcal{N}$ подобны в G, скажем $\mathcal{Q}=a\cdot\mathcal{P}\cdot a^{-1}$ с $a\in G$, то они подобны и в $\mathcal{N}$, т. е. найдется элемент $n\in\mathcal{N}$ такой, что $\mathcal{Q}=n\cdot\mathcal{P}\cdot n^{-1}$ (Мальцев [2]). Действительно, если записать, согласно (2.6), $a=r\cdot n$ ($r\in\mathcal{R}$, $n\in\mathcal{N}$), то из равенства $q=a\cdot p\cdot a^{-1}$ ($p\in\mathcal{P}$, $q\in\mathcal{Q}$) имеем $r\cdot(n\cdot p\cdot n^{-1})=(q\cdot r\cdot q^{-1})\cdot q$. Отсюда, ввиду единственности разложения элементов из G в произведение элементов из $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$, следует $q=n\cdot p\cdot n^{-1}$, т. е. требуемое равенство $\mathcal{Q}=n\cdot\mathcal{P}\cdot n^{-1}$.

Обратимся теперь к вопросу о построении оптимальных систем подалгебр. Пусть L — конечномерная алгебра Ли, N — ее подалгебра Леви, а L' — некоторая подалгебра алгебры L. Если $L'=R'+N'$ — произвольное разложение Леви для подалгебры L', то R' и L' представляют собой разрешимую и полупростую подалгебры алгебры L. Отсюда и из приведенных выше замечаний относительно полупростых подгрупп следует, что построение оптимальных систем подалгебр алгебры L сводится к перечислению неподобных разрешимых подалгебр алгебры L и неподобных подалгебр алгебры N, рассматриваемой независимо от L. Например, оптимальная система θ_3 представляет собой объединение семейства неподобных трехмерных разрешимых подалгебр алгебры L с оптимальной системой трехмерных подалгебр алгебры N, так как любая трехмерная неразрешимая подалгебра проста и, следовательно, подобна некоторой подалгебре из N. Отметим еще, что довольно часто встречается в практике группового анализа дифференциальных уравнений случай, когда размерность подалгебры Леви N равна трем. В этом случае согласно теореме Леви — Мальцева задачу решает перечисление разрешимых подалгебр алгебры L.

§ 3. Группы преобразований

3.1. Локальные группы преобразований. Пусть $K\subset\mathbb{R}^r$ — открытый шар в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$ с центром в точке 0. Рассматриваются гладкие отображения

$$f\colon \mathbb{R}^n\times K\to\mathbb{R}^n \tag{3.1}$$