Бурбаки [1], гл. 1, § 6, п° 8). А именно, в теореме Мальцева достаточно ограничиться рассмотрением специальных автоморфизмов — внутренних автоморфизмов $\exp(\operatorname{ad}\xi)$, порожденных элементами ξ из нильпотентного радикала алгебры L.

Пусть дано разложение Леви (2.6) группы G. Из теоремы Мальцева следует, что всякая полупростая подгруппа группы G подобна некоторой подгруппе из $\mathcal{N}$. Поэтому для классификации полупростых подгрупп группы G достаточно перечислить все неподобные подгруппы из $\mathcal{N}$. Следующее простое следствие теоремы Мальцева показывает, что при этом $\mathcal{N}$ можно рассматривать независимо от исходной группы G и использовать только внутренние автоморфизмы группы $\mathcal{N}$: если две подгруппы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ из $\mathcal{N}$ подобны в G, скажем $\mathcal{Q}=a\cdot\mathcal{P}\cdot a^{-1}$ с $a\in G$, то они подобны и в $\mathcal{N}$, т. е. найдется элемент $n\in\mathcal{N}$ такой, что $\mathcal{Q}=n\cdot\mathcal{P}\cdot n^{-1}$ (Мальцев [2]). Действительно, если записать, согласно (2.6), $a=r\cdot n$ ($r\in\mathcal{R}$, $n\in\mathcal{N}$), то из равенства $q=a\cdot p\cdot a^{-1}$ ($p\in\mathcal{P}$, $q\in\mathcal{Q}$) имеем $r\cdot(n\cdot p\cdot n^{-1})=(q\cdot r\cdot q^{-1})\cdot q$. Отсюда, ввиду единственности разложения элементов из G в произведение элементов из $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$, следует $q=n\cdot p\cdot n^{-1}$, т. е. требуемое равенство $\mathcal{Q}=n\cdot\mathcal{P}\cdot n^{-1}$.

Обратимся теперь к вопросу о построении оптимальных систем подалгебр. Пусть L — конечномерная алгебра Ли, N — ее подалгебра Леви, а L' — некоторая подалгебра алгебры L. Если $L'=R'+N'$ — произвольное разложение Леви для подалгебры L', то R' и L' представляют собой разрешимую и полупростую подалгебры алгебры L. Отсюда и из приведенных выше замечаний относительно полупростых подгрупп следует, что построение оптимальных систем подалгебр алгебры L сводится к перечислению неподобных разрешимых подалгебр алгебры L и неподобных подалгебр алгебры N, рассматриваемой независимо от L. Например, оптимальная система θ_3 представляет собой объединение семейства неподобных трехмерных разрешимых подалгебр алгебры L с оптимальной системой трехмерных подалгебр алгебры N, так как любая трехмерная неразрешимая подалгебра проста и, следовательно, подобна некоторой подалгебре из N. Отметим еще, что довольно часто встречается в практике группового анализа дифференциальных уравнений случай, когда размерность подалгебры Леви N равна трем. В этом случае согласно теореме Леви — Мальцева задачу решает перечисление разрешимых подалгебр алгебры L.

§ 3. Группы преобразований

3.1. Локальные группы преобразований. Пусть $K\subset\mathbb{R}^r$ — открытый шар в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$ с центром в точке 0. Рассматриваются гладкие отображения

$$f\colon \mathbb{R}^n\times K\to\mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

и определяемые ими преобразования T_a пространства $\mathbb{R}^n$ в себя:

$$T_a x = f(x, a), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad a \in K. \tag{3.2}$$

При этом координаты точки $a = (a^1, \ldots, a^r)$ из K играют роль параметров преобразований (3.2). Предполагается, что преобразования существенно зависят от всех r вещественных параметров $a^1, \ldots, a^r$ и что каждое преобразование T_a взаимно однозначно. Пусть, далее, $f(x, 0) = x$, так что T_0 является тождественным преобразованием, и пусть для любого ненулевого значения параметра a соответствующее преобразование T_a отлично от тождественного.

Множество G_r всех преобразований (3.2), снабженное естественной топологией, называется *непрерывной r-параметрической локальной группой преобразований* в $\mathbb{R}^n$, если G_r является r-мерной локальной группой Ли относительно групповой операции, задаваемой с помощью умножения преобразований:

$$(T_b \cdot T_a)\, x = T_b (T_a x) \equiv f(f(x, a), b).$$

Допуская вольность в терминологии, эти локальные группы называют просто *группами преобразований*. Единицей в группе G_r является тождественное преобразование T_0, произведение $T_b \cdot T_a$ и обратное к T_a преобразование T_a^{-1} определены для любых точек a, b из некоторого открытого шара $K' \subset K$. При этом отображение φ: $K' \times K' \to K$, определяемое групповой операцией в G_r формулой $T_b \cdot T_a = T_{\varphi(a, b)}$, является аналитическим. Значение параметра, соответствующее обратному к T_a преобразованию, обозначается a^{-1}, так что $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$.

Для фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^n$ множество $G_r(x)$ всех ее образов Tx, $T \in G_r$, образует локальное многообразие в $\mathbb{R}^n$. Это многообразие называется *орбитой*, или *G_r-орбитой*, точки x. Орбитой множества $A \subset \mathbb{R}^n$ является многообразие $G_r(A) = \bigcup\limits_{x \in A} G_r(x)$.

3.2. Уравнение Ли. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, содержащий точку 0, и G_1 — однопараметрическая группа преобразований

$$T_a x = f(x, a), \qquad a \in I \tag{3.3}$$

в $\mathbb{R}^n$. Орбита точки $x \in \mathbb{R}^n$ представляет собой кривую $a \mapsto f(x, a)$ в $\mathbb{R}^n$, проходящую через x. Касательный вектор к этой кривой в точке x имеет вид

$$\xi(x) = \left.\frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{3.4}$$

Формула (3.4) определяет касательное векторное поле ξ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ группы G_1. Векторное поле (3.4) записывается также в виде линейного дифференциального оператора первого порядка

$$X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.5}$$

и называется *инфинитезимальным оператором*, или кратко оператором, однопараметрической группы G_1.

Теорема Ли устанавливает соответствие между группой G_1 и ее инфинитезимальным оператором (3.5). А именно, орбита $G_1(x)$ точки x является интегральной кривой уравнения Ли

$$\frac{df}{da}=\xi(f), \quad f|_{a=0}=x. \tag{3.6}$$

Обратно, для любого гладкого векторного поля ξ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует, притом единственное, решение уравнения Ли. Это решение определяет однопараметрическую группу преобразований (3.3), касательное векторное поле которой совпадает с заданным полем ξ.

Умножение поля ξ на постоянный множитель равносильно линейной замене параметра соответствующей однопараметрической группы, как это видно из уравнения Ли. Поэтому инфинитезимальные операторы рассматриваются с точностью до постоянного множителя.

Рассмотрим теперь r-параметрическую группу G_r преобразований (3.2) в $\mathbb{R}^n$. Если для каждой однопараметрической подгруппы группы G_r построить соответствующее касательное векторное поле, то эти поля образуют r-мерное векторное пространство L_r. Пространство L_r является алгеброй Ли относительно умножения

$$[\xi, \eta]=\eta'\xi-\xi'\eta, \tag{3.7}$$

где ξ', η' — производные отображений ξ, η: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Для соответствующих инфинитезимальных операторов $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ закон умножения (3.7) в алгебре L_r выражается следующей формулой:

$$[X, Y]=XY-YX=(X(\eta^i)-Y(\xi^i))\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.8}$$

В качестве базиса алгебры L_r можно взять векторные поля

$$\xi_\nu(x)=\left.\frac{\partial f(x, a)}{\partial a^\nu}\right|_{a=0}, \qquad \nu=1, \ldots, r, \tag{3.9}$$

где a^ν — координаты параметрической точки $a \in K_\rho$ преобразований (3.2).

Уравнение Ли, связывающее группу G_r с ее алгеброй Ли L_r, имеет вид следующей вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial a^\nu}=V_\nu^\mu(a)\,\xi_\mu(f), \qquad \nu=1, \ldots, r; \quad f_{a=0}=x. \tag{3.10}$$

Коэффициенты $V^{\mu}_{\nu}(a)$ системы (3.10) определяются по закону умножения $\varphi(a, b)$ в группе G_r формулой

$$V^{\mu}_{\nu}(a) = \frac{\partial \varphi^{\mu}(a, b)}{\partial a^{\nu}}\bigg|_{b=a^{-1}}. \tag{3.11}$$

Построение преобразований группы G_r по ее заданной алгебре Ли L_r удобно производить в канонических координатах второго рода. Для этого выбирается некоторый базис $\{\xi_{\nu}\}$ алгебры L_r и для каждого базисного вектора ξ_{ν} строится соответствующая однопараметрическая группа преобразований с помощью уравнения Ли:

$$\frac{df}{da^{\nu}} = \xi_{\nu}(f), \qquad f\,|_{a^{\nu}=0} = x.$$

Преобразования группы G_r получаются перемножением преобразований полученных однопараметрических групп. При этом параметры $a^1, \ldots, a^r$ выполняют роль координат параметрической точки a группы G_r и задают в локальной группе G_r систему координат, называемую канонической второго рода.

3.3. Инварианты. Функция $F(x)$ называется *инвариантом* группы G_r преобразований (3.2) в $\mathbb{R}^n$, если F постоянна на G_r-орбите каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F(f(x, a)) = F(x). \tag{3.12}$$

Функция F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является инвариантом однопараметрической группы преобразований (3.3) тогда и только тогда, когда

$$XF \equiv \xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0. \tag{3.13}$$

Это следует из равенства

$$\frac{\partial F(f)}{\partial a} = F'(f)\cdot\xi(f),$$

справедливого в силу уравнения Ли (3.6) для произвольного дифференцируемого отображения F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; F' — производная этого отображения. Любой набор $n-1$ функционально независимых решений $J_1(x), \ldots, J_{n-1}(x)$ дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (3.13) образуют базис инвариантов: всякий инвариант F представим в виде $F(x) = \Phi(J_1(x), \ldots, J_{n-1}(x))$ с некоторой функцией Φ: $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

Для r-параметрической группы G_r преобразований в $\mathbb{R}^n$ критерий инварианта принимает вид следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\xi^i_{\nu}(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, r, \tag{3.14}$$

где ξ_ν—базисные векторные поля (3.9) алгебры Ли группы G_r. Число решений уравнений (3.14) определяется величиной

$$r_*(\xi) = \operatorname{rank}[\xi_\nu^i(x)]. \tag{3.15}$$

А именно, если x—точка общего положения (т. е. $r_* = \text{const}$ в некоторой окрестности точки x) и $r_* < n$, то система (3.14) имеет $n - r_*$ функционально независимых решений, которые образуют базис инвариантов группы G_r. При $r_* = n$ группа G_r не имеет инвариантов—она транзитивна.

В более общей ситуации, когда вместо преобразований в $\mathbb{R}^n$ рассматриваются группы преобразований в произвольном банаховом пространстве, роль базиса инвариантов играет универсальный инвариант группы (Овсянников [4], § 3). Пусть B, B_1, B_2—банаховы пространства, G—группа преобразований в пространстве B, а отображение $J\colon B \to B_1$ является инвариантом группы G, т. е. $J \circ T = J$ для любого преобразования $T \in G$. Для любого отображения $\Phi\colon B_1 \to B_2$ суперпозиция $\Phi \circ J\colon B \to B_2$ является, очевидно, инвариантом группы G. Инвариант J называется *универсальным инвариантом* группы G, если для произвольного пространства B_2 каждый инвариант $F\colon B \to B_2$ группы G может быть представлен в виде $F = \Phi \circ J$ с гладким отображением Φ из пространства B_1 в B_2. Всякая r-параметрическая группа преобразований в банаховом пространстве B имеет универсальный инвариант.

3.4. Инвариантные многообразия. Рассматривается m-мерное локальное многообразие M в $\mathbb{R}^n$, т. е. множество $M \subset \mathbb{R}^n$, все точки которого с помощью диффеоморфизма некоторой окрестности $U \supset M$ в $\mathbb{R}^n$ приводятся к виду

$$x = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0) \tag{3.16}$$

с произвольными значениями координат $x^1, \ldots, x^m$. Пусть многообразие M параметризовано с помощью дифференцируемого отображения $h\colon V \to \mathbb{R}^n$, где V—открытое множество из $\mathbb{R}^m$. Отображение h устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами V и M, причем $\operatorname{rank} h'(y) = m$ для всех $y \in V$. Касательное пространство к M в точке $x \in M$ может быть представлено как

$$M_x = \{dx \in \mathbb{R}^n_x \mid dx = h'(y)\,dy,\ dy \in \mathbb{R}^m_y\},$$

где $\mathbb{R}^n_x$—касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке x, причем элементы (x, dx) из $\mathbb{R}^n_x$ записываются сокращенно dx и рассматриваются как n-мерные векторы с началом в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Если использовать обозначение $x = (x_m, x_{n-m})$, где $x_m = (x^1, \ldots, x^m)$, $x_{n-m} = (x^{m+1}, \ldots, x^n)$, то условие (3.16) примет вид

$$x_{n-m} = 0. \tag{3.16'}$$

Пусть задано векторное поле F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и пусть точки многообразия M приведены к виду (3.16). Вектор $F(x)$ как элемент пространства $\mathbb{R}^n_x$ (т. е. пара $(x, F(x))$) принадлежит M_x тогда и только тогда, когда

$$F_{n-m}(x_m, 0) = 0,$$

где снова использовано обозначение $F = (F_m, F_{n-m})$.

Многообразие M называется *инвариантным* относительно группы G, если G-орбита каждой точки $x \in M$ содержится в M, т. е. $G(M) = M$. Удобно пользоваться следующим инфинитезимальным критерием инвариантности:

Многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ инвариантно относительно группы G_r тогда и только тогда, когда для всех векторных полей ξ из алгебры Ли L_r группы G_r выполняется условие

$$\xi(x) \in M_x \tag{3.17}$$

в каждой точке $x \in M$.

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть однопараметрическую группу G_1 преобразований (3.3) с касательным вектором (3.4) и считать, что точки многообразия M приведены подходящим диффеоморфизмом к виду (3.16). При этом инвариантность M означает выполнение равенства

$$f_{n-m}((x_m, 0), a) = 0, \tag{3.18}$$

а условие (3.17) дает

$$\xi_{n-m}(x_m, 0) = 0. \tag{3.19}$$

Из равенства (3.18) и формулы (3.4) сразу вытекает выполнение (3.19). Пусть теперь выполнено условие (3.19). Тогда уравнение Ли (3.6) для любого $x = (x_m, 0)$ имеет решение $f = (f_m, f_{n-m})$ с $f_{n-m} = 0$. В силу единственности решения отсюда следует выполнение равенства (3.18).

Пусть отображение F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ дифференцируемо и m-мерное многообразие M в $\mathbb{R}^n$ задано уравнением

$$F(x) = 0 \tag{3.20}$$

как множество решений этого уравнения; предположим, что $\operatorname{rank} F'(x) = n - m$ для всех $x \in M$. В этом случае инфинитезимальный критерий инвариантности (3.17) принимает вид

$$\xi^i_\nu(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x^i}\bigg|_M = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, r, \tag{3.21}$$

где ξ_ν — базисные векторные поля (3.9) алгебры L_r.

Замечание. Рассмотрим некоторое множество N, содержащееся в многообразии M. Если G-орбита каждой точки из N лежит в M (инвариантность многообразия M относительно группы G не предполагается), то геометрически очевидно, что $\xi(x) \in M_x$ для

всех точек $x \in N$. В случае многообразия M, заданного уравнением (3.20), это означает выполнение условия $\xi_\nu^i \frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_N = 0$.

В дальнейшем рассматриваются только неособые (относительно группы G_r) многообразия M, т. е. такие, для которых $r_*(\xi|_M) = r_*(\xi)$. Пусть $r_*(\xi)$ постоянен в некоторой окрестности многообразия M и меньше n. В этом случае задание инвариантного многообразия M группы G_r уравнением (3.20) всегда может быть реализовано с помощью инвариантов группы G_r и записано в виде (см. Овсянников [4], § 18)

$$\Phi^k(J_1, \ldots, J_{n-r_*}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n-m, \tag{3.22}$$

где $J_1(x), \ldots, J_{n-r_*}(x)$—базис инвариантов группы G_r. Так как $G_r(x) \subset M$ для любой точки $x \in M$, то $r_* \leqslant m$. Уравнение (3.22) представляет m-мерное многообразие M в $\mathbb{R}^n$ как многообразие размерности

$$\rho = m - r_* \tag{3.23}$$

в пространстве инвариантов $J_1, \ldots, J_{n-r_*}$. Это число ρ называется *рангом* M.

Для произвольного многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ орбита $G_r(M)$ является минимальным инвариантным относительно G_r многообразием, содержащим M как подмногообразие коразмерности

$$\delta = \dim G_r(M) - \dim M. \tag{3.24}$$

Число δ называется *дефектом* многообразия M относительно группы G_r, а ранг орбиты $G_r(M)$ называется *рангом* M. Инвариантные многообразия характеризуются условием $\delta = 0$. Дефект многообразия, заданного уравнением (3.20), равен (см. Овсянников [3] или [4], § 21)

$$\delta = \operatorname{rank}\left[\xi_\nu^i(x)\frac{\partial F^k(x)}{\partial x^i}\right]_M, \tag{3.25}$$

где $\{\xi_\nu\}$—базис инфинитезимальных операторов группы G_r. Ранг m-мерного многообразия, имеющего дефект δ, равен

$$\rho = m - r_* + \delta, \tag{3.26}$$

причем δ может принимать любые целые значения, удовлетворяющие условиям

$$\max\{r_* - m, 0\} \leqslant \delta \leqslant \min\{r_* - 1, n - m - 1\}. \tag{3.27}$$

§ 4. Инвариантные дифференциальные уравнения

4.1. Продолжение точечных преобразований. Рассматривается однопараметрическая группа G преобразований

$$\begin{aligned} x' &= f(x, u, a), \qquad f|_{a=0} = x, \\ u' &= \varphi(x, u, a), \qquad \varphi|_{a=0} = u \end{aligned} \tag{4.1}$$