

всех точек $x \in N$. В случае многообразия M , заданного уравнением (3.20), это означает выполнение условия $\xi_v^i \frac{\partial F}{\partial x^i} \Big|_N = 0$.

В дальнейшем рассматриваются только неособые (относительно группы G_r) многообразия M , т. е. такие, для которых $r_*(\xi|_M) = r_*(\xi)$. Пусть $r_*(\xi)$ постоянен в некоторой окрестности многообразия M и меньше n . В этом случае задание инвариантного многообразия M группы G_r уравнением (3.20) всегда может быть реализовано с помощью инвариантов группы G_r и записано в виде (см. Овсянников [4], § 18)

$$\Phi^k(J_1, \dots, J_{n-r_*}) = 0, \quad k = 1, \dots, n-m, \quad (3.22)$$

где $J_1(x), \dots, J_{n-r_*}(x)$ —базис инвариантов группы G_r . Так как $G_r(x) \subset M$ для любой точки $x \in M$, то $r_* \leq m$. Уравнение (3.22) представляет m -мерное многообразие M в \mathbb{R}^n как многообразие размерности

$$\rho = m - r_* \quad (3.23)$$

в пространстве инвариантов J_1, \dots, J_{n-r_*} . Это число ρ называется *рангом* M .

Для произвольного многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ орбита $G_r(M)$ является минимальным инвариантным относительно G_r многообразием, содержащим M как подмногообразие коразмерности

$$\delta = \dim G_r(M) - \dim M. \quad (3.24)$$

Число δ называется *дефектом* многообразия M относительно группы G_r , а ранг орбиты $G_r(M)$ называется *рангом* M . Инвариантные многообразия характеризуются условием $\delta = 0$. Дефект многообразия, заданного уравнением (3.20), равен (см. Овсянников [3] или [4], § 21)

$$\delta = \text{rank} \left[\xi_v^i(x) \frac{\partial F^k(x)}{\partial x^i} \right]_M, \quad (3.25)$$

где $\{\xi_v\}$ —базис инфинитезимальных операторов группы G_r . Ранг m -мерного многообразия, имеющего дефект δ , равен

$$\rho = m - r_* + \delta, \quad (3.26)$$

причем δ может принимать любые целые значения, удовлетворяющие условиям

$$\max \{r_* - m, 0\} \leq \delta \leq \min \{r_* - 1, n - m - 1\}. \quad (3.27)$$

§ 4. Инвариантные дифференциальные уравнения

4.1. Продолжение точечных преобразований. Рассматривается однопараметрическая группа G преобразований

$$\begin{aligned} x' &= f(x, u, a), & f|_{a=0} &= x, \\ u' &= \varphi(x, u, a), & \varphi|_{a=0} &= u \end{aligned} \quad (4.1)$$

в пространстве \mathbb{R}^{n+m} переменных $x = (x^1, \dots, x^n)$, $u = (u^1, \dots, u^m)$. Вводятся еще дополнительные переменные $u_i^\alpha = \{u_i^\alpha | \alpha = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n\}$ и задаются их преобразования

$$u_i^\alpha = \Psi_i^\alpha(x, u, u_i, a), \quad \Psi_i^\alpha|_{a=0} = u_i^\alpha \quad (4.2)$$

так, чтобы формулы (4.2) и преобразования производных $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ при замене переменных (4.1) были согласованы с равенствами

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i} \quad (4.3)$$

для любой функции $u^\alpha = u^\alpha(x)$. Этим условием преобразования (4.2) однозначно определяются для каждой группы G , и в результате получается однопараметрическая группа G преобразований (4.1), (4.2) в пространстве \mathbb{R}^{n+m+nm} переменных (x, u, u_i^α) . При этом преобразования (4.1) называются *точечными преобразованиями*, (4.2)—*продолжением* этих точечных преобразований, а группа G —*первым продолжением* группы G .

Пусть

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (4.4)$$

— инфинитезимальный оператор группы G , где

$$\xi = \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_{a=0}, \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial a} \Big|_{a=0}. \quad (4.5)$$

Оператор продолженной группы G равен

$$X = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}.$$

Дополнительные координаты $\zeta_i^\alpha = \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial a} \Big|_{a=0}$ этого оператора подлежат определению из условия согласования (4.2) с равенствами (4.3). С помощью величины $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^m)$, где

$$\omega^\alpha = du^\alpha - u_i^\alpha dx^i, \quad (4.6)$$

равенства (4.3) переписываются в виде

$$\omega = 0. \quad (4.7)$$

Условие согласования, накладываемое на продолжение, означает, что уравнение (4.7) задает инвариантное многообразие относительно группы \tilde{G} преобразований (4.1), (4.2) и

$$dx' = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha, \quad du' = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} du^\alpha$$

в пространстве переменных $(x, u, \underset{1}{u}, dx, du)$. С помощью инфинитезимального оператора

$$\tilde{X} = X + \underset{1}{\xi^i} \frac{\partial}{\partial dx^i} + \underset{2}{\eta^\alpha} \frac{\partial}{\partial du^\alpha}$$

группы \tilde{G} , где в соответствии с (4.5)

$$\begin{aligned}\xi &= \left. \frac{\partial dx'}{\partial a} \right|_{a=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \xi}{\partial u^\alpha} du^\alpha, \\ \eta &= \left. \frac{\partial du'}{\partial a} \right|_{a=0} = \frac{\partial \eta}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \eta}{\partial u^\alpha} du^\alpha,\end{aligned}$$

критерий инвариантности уравнений (4.7) записывается в виде

$$\tilde{X}\omega^\alpha|_{\omega=0} \equiv (\tilde{\eta}^\alpha - u_i^\alpha \tilde{\xi}^i - \xi_i^\alpha dx^i)|_{\omega=0} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Из этих уравнений после подстановки найденных выражений для $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, находится следующая формула продолжения оператора (4.4):

$$\xi_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j). \quad (4.8)$$

Здесь $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ — оператор полного дифференцирования по переменной x^i .

Продолжения более высокого порядка осуществляются путем определения действия группы G на переменные $u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \dots$, где

$$u_s = \{u_{i_1 \dots i_s}^\alpha | \alpha = 1, \dots, m; i_1, \dots, i_s = 1, \dots, n\}.$$

Так, например, для второго продолжения группы G нужно определить действие этой группы на переменные $u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \dots$, исходя из условия инвариантности системы уравнений

$$\omega = 0, \quad \underset{1}{\omega} = 0, \quad (4.9)$$

где $\omega = \{\omega_i^\alpha | \alpha = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n\}$ определяются формулами

$$\omega_i^\alpha = du_i^\alpha - u_{ij}^\alpha dx^j.$$

В результате получается второе продолжение G группы G . Инфинитезимальный оператор

$$\underset{2}{X} = X + \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \xi_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}$$

группы G получается путем последовательного продолжения оператора (4.5): сначала находятся координаты ξ_i^α из формул первого продолжения (4.8), а затем вычисляются координаты ξ_{ij}^α по

формулам второго продолжения:

$$\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k). \quad (4.10)$$

Здесь оператор D_i , с учетом зависимости выражения ζ_i^α от переменных u , принимает вид $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}$.

Продолжение произвольной r -параметрической группы преобразований и ее алгебры Ли осуществляется тем же путем. При этом s раз продолженная группа является r -параметрической группой, имеющей те же структурные свойства, что и исходная группа. Это следует из перестановочности продолжения операторов (4.5) с их умножением (3.8): если $Z = [X, Y]$, то $Z = [X, Y]$.

Инварианты продолженной группы G для любого $s > 0$ называются *дифференциальными инвариантами* (порядка s) исходной группы G . Поскольку с ростом s число преобразуемых переменных x, u, u, \dots неограниченно растет, то группа G обладает бесконечным множеством функционально независимых дифференциальных инвариантов. Однако для любой группы можно построить конечный базис дифференциальных инвариантов, если ввести в рассмотрение так называемые операторы инвариантного дифференцирования (см. Tresse [1], а также Овсянников [4], гл. VII). Эти операторы переводят любой дифференциальный инвариант данной группы снова в дифференциальный инвариант той же группы. Для всякой группы G , можно построить n независимых операторов инвариантного дифференцирования вида $\lambda^i(x, u, u, \dots) D_i$. Их коэффициенты $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ определяются из уравнений

$$X_v \lambda = \lambda^i D_i \xi_v, \quad v = 1, \dots, r,$$

где $X_v = \xi_v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_v^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ — базисные операторы группы G , X_v — s -е продолжение оператора X_v , а порядок продолжения s выбирается из условия $\text{rank}[\xi_v^i, \eta_v^\alpha, \zeta_{vi}^\alpha, \dots] = r$. Теорема Тресса о базисе утверждает, что существует конечный набор дифференциальных инвариантов порядка s , из которого всякий дифференциальный инвариант (произвольного порядка) рассматриваемой группы получается с помощью функциональных операций и инвариантного дифференцирования.

4.2. Определяющее уравнение. В пространстве переменных (x, u, u, \dots, u) рассматривается локальное многообразие, заданное системой дифференциальных уравнений в частных производных порядка s :

$$F(x, u, u, \dots, u) = 0, \quad (4.11)$$

где $F = (F^1, \dots, F^p)$. Говорят, что система (4.11) инвариантна относительно группы G преобразований (4.1), или допускает эту группу, если многообразие, заданное уравнениями (4.11), инвариантно относительно s -го продолжения G группы G .

Если X — инфинитезимальный оператор группы G , то в соответствии с § 3.4 критерий инвариантности уравнений (4.11) относительно группы G имеет вид

$$(XF)_{\overset{s}{F}=0} = 0, \quad (4.12)$$

где X — продолжение порядка s оператора X . Условие (4.12) называется *определенющим уравнением* группы, допускаемой системой (4.11).

Формулы продолжения (4.8), (4.10) и их высшие аналоги показывают, что уравнение (4.12) представляет собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений относительно координат $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$ оператора X . Следовательно, решения определяющего уравнения образуют векторное пространство. Кроме того, для любых двух решений X, Y уравнения (4.12) их коммутатор $[X, Y]$ снова является решением; это следует из геометрического смысла определяющего уравнения как условия инвариантности некоторого многообразия и перестановочности операций продолжения и умножения операторов X, Y . Таким образом, множество всех решений определяющего уравнения (4.12) образует алгебру Ли. Соответствующая этой алгебре локальная группа Ли представляет собой максимальную группу преобразований, допускаемую данной системой дифференциальных уравнений (4.11).

В определяющем уравнении все величины $x, u, \overset{!}{u}, \dots, \overset{s}{u}$ играют роль независимых переменных, связанных только соотношениями (4.11), и условие (4.12) должно выполняться тождественно по всем «свободным» переменным. Это приводит к тому, что определяющее уравнение реализуется как переопределенная система дифференциальных уравнений относительно искомых функций $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$.

Группа G , допускаемая данной системой дифференциальных уравнений (4.11), может быть использована для построения новых решений из уже известных, так как под действием преобразований группы G всякое решение уравнений (4.11) переходит снова в решение. Поэтому в семействе всех решений уравнений (4.11) естественно ввести отношение эквивалентности, считая эквивалентными решения, преобразующиеся друг в друга с помощью группы G . Семейство неэквивалентных решений описывается некоторой системой дифференциальных уравнений, которую Ли назвал *разрешающей системой*. Разрешающая система дополняется автоморфной системой до исходной системы уравнений (4.11).

Автоморфная система задает для каждого решения разрешающей системы множество всех эквивалентных решений уравнений (4.11). При этом разрешающая система уже не допускает группу G , а на множестве решений автоморфной системы группа G действует транзитивно. Возможность разложения дифференциальных уравнений, допускающих непрерывную группу преобразований, на разрешающую и автоморфную системы впервые продемонстрировал Lie [5] на примере уравнений с двумя независимыми переменными. В общем виде задача была решена Vessiot [1] на основе теоремы Тressса о базисе дифференциальных инвариантов. Современное изложение этого вопроса имеется в монографии Овсянникова [4], § 26.

4.3. Инвариантные и частично инвариантные решения. В различных задачах математической физики свойства инвариантности дифференциальных уравнений используются для построения частных решений, известных (после появления работ Овсянникова [1, 2]) как инвариантные и частично инвариантные решения. Примерами инвариантных решений являются широко использующиеся в механике стационарные, одномерные, осесимметрические, автомодельные решения. В общей теории относительности инвариантные решения возникают как пространства Эйнштейна, имеющие заданную группу изометрических движений. В качестве наиболее известных частично инвариантных решений можно назвать функционально-инвариантные решения волнового уравнения, а также простые, двойные (вообще, произвольной кратности) волны для квазилинейных систем дифференциальных уравнений.

Пусть G — максимальная группа, допускаемая уравнениями (4.11), и H — подгруппа группы G . Всякое решение $u = u(x)$ можно трактовать как n -мерное многообразие U в $(n+m)$ -мерном пространстве переменных (x, u) , заданное уравнением

$$U: u - u(x) = 0. \quad (4.13)$$

В дальнейшем предполагается, что U — неособое многообразие относительно H . Дефект многообразия U относительно группы H равен

$$\delta = \dim H(U) - n. \quad (4.14)$$

Если $\delta = 0$, т. е. если U является инвариантным многообразием группы H , то рассматриваемое решение называется *инвариантным решением* (относительно группы H). При $0 < \delta < m$ это решение называется *частично инвариантным решением дефекта δ* . Ранг многообразия U называется при этом *рангом* рассматриваемого решения.

Алгоритм построения инвариантных и частично инвариантных решений опирается на представление неособых инвариантных многообразий в виде (3.22) и состоит в следующем (подробности см. Овсянников [2] или [4]). Пусть H — r -параметрическая группа,

$\{(\xi_v, \eta_v)\}$ — базис алгебры Ли этой группы. Предположим, что $r_*(\xi_v, \eta_v) < n$ (формула (3.15)), и выберем базис инвариантов

$$J_1(x, u), \dots, J_{m+n-r_*}(x, u) \quad (4.15)$$

группы H . Рассмотрим случай инвариантных решений. Неособые инвариантные решения (4.13) в соответствии с общей формулой (3.22) ищутся в виде

$$\Phi^\alpha(J_1, \dots, J_{m+n-r_*}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (4.16)$$

Для того чтобы многообразие (4.16) можно было записать в разрешенном виде (4.13), инварианты (4.15) должны быть независимы по отношению к переменным u , т. е. $\text{rank} \left[\frac{\partial J_i}{\partial u^\alpha} \right] = m^*$). Предположим, что этому условию удовлетворяют первые m инвариантов J_1, \dots, J_m . Введем теперь переменные v, y :

$$v^\alpha = J_\alpha(x, u), \quad y^i = J_{m+i}(x, u) \quad (\alpha = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n - r_*), \quad (4.17)$$

и запишем равенства (4.16) в виде

$$v^\alpha = v^\alpha(y), \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (4.18)$$

Из (4.17) и (4.18) можно выразить все величины u, u, \dots через переменные x, y, v и производные от v по y . Подстановка полученных выражений для u, u, \dots, u в (4.11) дает систему уравнений, содержащую только величины y, v и производные от v по y . Эта система уравнений дает все инвариантные решения (4.18) исходных уравнений (4.11). Заметим, что ранг инвариантных решений, равный согласно формуле (3.23)

$$\rho = n - r_*, \quad (4.19)$$

представляет собой число независимых переменных в полученной системе уравнений; если $r_* = n$, то уравнение (4.18) берется в виде $J_\alpha(x, u) = c_\alpha, c_\alpha = \text{const}, \alpha = 1, \dots, m$. Таким образом, ограничиваясь рассмотрением только инвариантных решений относительно заданной r -параметрической группы H , мы уменьшаем число независимых переменных на r_* . В приложениях наиболее часто встречается случай, когда у группы H имеется ρ инвариантов, зависящих только от переменных x ; эти инварианты и выбираются в качестве y .

Построение частично инвариантных решений производится по аналогичной схеме. В этом случае сначала задают значение дефекта δ , выбирая его в соответствии с условиями (3.27):

$$\max \{r_* - n, 0\} \leq \delta \leq \min \{r_* - 1, m - 1\}. \quad (4.20)$$

) Это равенство, требующее предварительного отыскания базиса инвариантов, можно заменить условием $r_(\xi, \eta) = r_*(\xi)$; см. Овсянников [4], стр. 250.

Потом находят такие инварианты $J_1(x, u), \dots, J_{m-\delta}(x, u)$ группы H , которые удовлетворяют условию $\text{rank} \left[\frac{\partial J_l}{\partial u^\alpha} \right] = m - \delta$, а затем переходят к переменным

$$v^l = J_l(x, u), \quad y^i = J_{m-\delta+i}(x, u) \quad (l = 1, \dots, m - \delta; i = 1, \dots, \rho).$$

Здесь ρ — ранг решения, который согласно формуле (3.26) равен

$$\rho = n - r_* + \delta. \quad (4.21)$$

Уравнения наименьшего инвариантного многообразия, содержащего искомое частично инвариантное решение (4.13) как подмногообразие коразмерности δ , записываются в виде

$$v^l = v^l(y), \quad l = 1, \dots, m - \delta. \quad (4.22)$$

Отсюда можно выразить переменные $u^1, \dots, u^{m-\delta}$ через x, y, v и $w^\sigma = u^{m-\delta+\sigma}$, $\sigma = 1, \dots, \delta$. Подстановка этих выражений для $u^1, \dots, u^{m-\delta}$ и их производных в уравнения (4.11) приводит к системе дифференциальных уравнений относительно $m - \delta$ функций v^l от ρ независимых переменных y^1, \dots, y^ρ и системе уравнений относительно δ функций w^σ от n переменных x^1, \dots, x^n . Полученными уравнениями описываются все частично инвариантные решения дефекта δ и ранга ρ , где ρ определяется формулой (4.21).

Таким образом, для описания всех типов инвариантных и частично инвариантных решений нужно указать возможные значения рангов r_* подгруппы группы G и в соответствии с (4.20), (4.21) выбрать все пары чисел (δ, ρ) , характеризующие тип решения. Затем решение типа (δ, ρ) задается в виде (4.22).

Если две подгруппы H и H' группы G подобны, то соответствующие им инвариантные или частично инвариантные решения переводятся друг в друга тем же преобразованием группы G , которое осуществляет сопряжение этих подгрупп. Поэтому для отыскания существенно различных решений достаточно изучить решения, полученные на подгруппах из оптимальной системы подгрупп соответствующего порядка (§ 2.6).

4.4. Метод инвариантных мажорант. Выше был описан алгоритм построения инвариантных решений на основе группы, допускаемой рассматриваемыми уравнениями. Часто встречаются такие ситуации, когда исходные дифференциальные уравнения не допускают нетривиальную группу, но тем не менее понятие инвариантного решения может быть с успехом использовано для выяснения принципиальных теоретических вопросов. Например, при доказательстве теоремы Коши—Ковалевской существенно используется инвариантное решение, хотя обычно эта сторона вопроса не подчеркивается. Выделение идеи инвариантности позволяет доказать теорему существования решения в тех задачах, где классическая теорема Коши—Ковалевской не применима (Тешуков [1]).

Выясним, как используется понятие инвариантного решения при доказательстве теоремы Коши—Ковалевской. Следующий пример достаточно ясно иллюстрирует основные моменты доказательства. Рассматривается задача Коши *)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^i(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x^i} + f(t, x, u), \\ u|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$, коэффициенты a^i и f —аналитические функции своих аргументов в некоторой окрестности точки $t = 0, x = x_0, u = 0$. Первым этапом доказательства является построение решения u в виде формального степенного ряда по переменным $t, x - x_0$. Тем самым вопрос существования аналитического решения задачи (4.23) сводится к доказательству сходимости построенного ряда. Для этого рассматривается вспомогательная, мажорантная, задача

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \tilde{a}^i(t, x, \tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^i} + \tilde{f}(t, x, \tilde{u}), \quad (4.24)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} \gg 0. \quad (4.25)$$

Коэффициенты \tilde{a}^i уравнения (4.24) и функция \tilde{f} мажорируют соответствующие величины исходной задачи (4.23): $\tilde{a}^i(t, x, v) \gg a^i(t, x, v), \tilde{f}(t, x, v) \gg f(t, x, v)$. Отношение мажорирования $\tilde{f} \gg f$ для формальных степенных рядов \tilde{f} и f означает, что коэффициенты первого ряда не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов второго ряда. По виду задача (4.24), (4.25) не проще исходной задачи Коши. Однако можно прийти к существенному упрощению, если, пользуясь произволом в выборе коэффициентов мажорантной задачи, потребовать инвариантность уравнения (4.24) относительно некоторой группы G_r . Так как наличие r -параметрической группы позволяет искать инвариантные решения, зависящие от $\rho = n+1-r$ переменных (см. § 4.3), то задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения, если $r_* = n$. Выбор в качестве G_n простейшей группы переносов с операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \tau \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_k = \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad k = 2, \dots, n, \quad \tau = \text{const} \quad (4.26)$$

дает

$$\tilde{a}^i = \tilde{a}^i(\tau t + x^1 + \dots + x^n, \tilde{u}), \quad \tilde{f} = \tilde{f}(\tau t + x^1 + \dots + x^n, \tilde{u}).$$

*) Задача с произвольным начальным значением $u|_{t=0}$ заменой функции u сводится к виду (4.23).

Этому классу функций принадлежит стандартная мажоранта

$$A = \frac{K}{1 - \frac{\xi}{\tau}} \cdot \frac{C}{1 - \frac{\tilde{u}}{\rho}}, \quad (4.27)$$

где $\xi = \tau t + (x^1 - x_0^1) + \dots + (x^n - x_0^n)$, а $K, C, r, \rho = \text{const}$. Подходящим выбором постоянных K, C, r, ρ можно добиться выполнения условий

$$A \gg f, \quad a^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

что позволяет положить в уравнении (4.24) $\tilde{a}^i = \tilde{f} = A$. Теперь можно искать инвариантную мажоранту, т. е. инвариантное (относительно группы G_n) решение уравнения (4.24), в виде

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\xi). \quad (4.28)$$

При этом уравнение (4.24) принимает вид

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{A}{1 - \frac{nA}{\tau}}. \quad (4.29)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.29), удовлетворяющее начальному условию

$$\tilde{u}(0) = 0, \quad (4.30)$$

при достаточно большом значении постоянной τ дает аналитическую мажоранту \tilde{u} , удовлетворяющую (4.24), (4.25). Из отношения $\tilde{u} \gg u$ следует сходимость формального ряда u .

При построении инвариантных мажорант выбор группы G , должен производиться с учетом специфики задачи. Применение группы переносов, использованной выше, оказывается эффективным не только в задаче Коши, но и в смешанной задаче (см. Duff [2]). В приводимом ниже примере в основу кладется группа растяжений. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений не является системой типа Коши—Ковалевской. При ее изучении групповое соображение является решающим и указывает метод доказательства существования решения.

Для системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} u_t &= a_1 u_x + a_2 v_x + a_3, \\ tv_t + v &= b_1 u_x + ta_4 v_x + b_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

с двумя независимыми переменными t, x рассматривается задача с начальным условием *)

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (4.32)$$

*) та задача представляет собой упрощенную модель задачи о течениях газа с особенностями типа центрированных волн, изученную Тешуковым [1]. Примененный там подход достаточно ясно иллюстрируется приводимым примером.

Коэффициенты уравнений (4.31) удовлетворяют условиям

$$a_i = a_i(t, x, u, v), \quad i = 1, \dots, 4; \quad b_k = b_k(t, x, u, tv), \quad k = 1, 2, \quad (4.33)$$

и предполагаются аналитическими функциями своих аргументов. Легко видеть, что начальное многообразие, прямая $t = 0$, является характеристикой. На этой прямой второе из уравнений (4.31) невозможно разрешить относительно величин v_t, v_x . Поэтому для системы (4.31) корректна (в классе аналитических функций) задача только с одним начальным условием (4.32). В силу условий (4.33) второе уравнение системы (4.31) разрешимо на прямой $t = 0$ относительно v .

Задача (4.31), (4.32) простой заменой функций u, v сводится к задаче

$$\begin{aligned} u_t &= a_1 u_x + a_2 v_x + a_3, \\ tv_t + v &= b_1 u_x + t(a_4 v_x + a_5) + ub_2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (4.35)$$

с коэффициентами $a_i (i = 1, \dots, 5)$, $b_k (k = 1, 2)$, удовлетворяющими условиям (4.33). Решение задачи ищется в окрестности точки $t = 0$, $x = x_0$ в виде формальных степенных рядов u, v от переменных $t, x - x_0$. Коэффициенты рядов, как нетрудно убедиться, однозначно определяются из (4.34), (4.35).

Рассмотрим теперь вопрос о построении подходящей мажорантной задачи. При ее выборе, руководствуясь предыдущим примером, будем требовать, чтобы она была «лучше» исходной задачи в том смысле, чтобы мажорантные уравнения допускали некоторую однопараметрическую группу G_1 . С учетом неравноправности переменных t и x (это проявляется, в частности, в том, что производные по t порядка n от решения выражаются через производные от начальных данных по x порядка $2n$) в качестве G_1 возьмем группу растяжений, которая определится одновременно с видом мажорантной системы. Выберем постоянные $C, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ так, чтобы

$$\frac{C}{(1 - \alpha x)(1 - \beta t)(1 - \gamma u)(1 - \delta v)} \gg a_i(t, x, u, v), \quad (4.36)$$

$$\frac{C}{(1 - \alpha x)(1 - \beta t)(1 - \gamma u)(1 - \delta tv)} \gg b_k(t, x, u, tv), \quad (4.37)$$

и будем подвергать растяжению величины $1 - \alpha x, t, u, v$. Принимая во внимание, что инварианты группы растяжений имеют вид

$$\frac{t}{(1 - \alpha x)^p}, \quad \frac{u}{(1 - \alpha x)^q}, \quad \frac{v}{(1 - \alpha x)^s}$$

с некоторыми целыми p, q, s , отношения мажорирования (4.36), (4.37) заменим следующими:

$$\frac{C\theta^{n_i} [1 + g_i(\mu\theta^q) + h_i(\mu\theta^s)]}{(1 - \beta t\theta^p)(1 - \gamma u\theta^q)(1 - \delta v\theta^s)} \gg a_i, \quad (4.38)$$

$$\frac{C\theta^{m_k} (1 + \lambda_k)}{(1 - \beta t\theta^p)(1 - \gamma u\theta^q)(1 - \delta v\theta^{s+p})} \gg b_k. \quad (4.39)$$

Здесь $\theta = (1 - \alpha x)^{-1}$, $g_i(\sigma) \gg 0$, $h_i(\sigma) \gg 0$, $\lambda_k = \text{const} \geq 0$, а n_i, m_k — целые положительные числа; при этом использовано, что $(1 - \alpha x)^{-l} \gg 1$ для любого $l \geq 0$. Теперь в качестве коэффициентов мажорантных уравнений выбираются соответствующие функции из (4.38), (4.39). В результате получается задача

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_t &= A [(1 + g_1 + h_1) \theta^{n_1} \tilde{u}_x + (1 + g_2 + h_2) \theta^{n_2} \tilde{v}_x + (1 + g_3 + h_3) \theta^{n_3}], \\ \tilde{t}\tilde{v}_t + \tilde{v} &= B [(1 + \lambda_1) \theta^{m_1} \tilde{u}_x + (1 + \lambda_2) \theta^{m_2} \tilde{u}] + \\ &\quad + tA [(1 + g_4 + h_4) \theta^{n_4} \tilde{v}_x + (1 + g_5 + h_5) \theta^{n_5}], \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} \gg 0 \quad (4.41)$$

для отыскания мажорант \tilde{u}, \tilde{v} . Здесь функции

$$A = \frac{C}{(1 - \beta t\theta^p)(1 - \gamma u\theta^q)(1 - \delta v\theta^s)},$$

$$B = \frac{C}{(1 - \beta t\theta^p)(1 - \gamma u\theta^q)(1 - \delta v\theta^{s+p})}$$

являются инвариантами группы растяжений. Условия инвариантности системы (4.40) относительно преобразований

$$(1 - \alpha x) \mapsto \tau(1 - \alpha x), \quad t \mapsto \tau^p t, \quad \tilde{u} \mapsto \tau^q \tilde{u}, \quad \tilde{v} \mapsto \tau^s \tilde{v}$$

приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} q - p &= q - 1 - n_1 = s - 1 - n_2 = -n_3, \\ s - q - 1 - m_1 &= q - m_2 = p + s - 1 - n_4 = p - n_5, \end{aligned}$$

которые удовлетворяются, например, при

$$\begin{aligned} p &= 4, \quad q = 2, \quad s = 0, \\ n_1 &= 3, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 2, \quad n_4 = 3, \quad n_5 = 4, \\ m_1 &= 1, \quad m_2 = 2; \end{aligned} \quad (4.42)$$

эти значения выбраны с учетом необходимых ограничений $p, q, s \geq 0$, $n_i, m_k \geq 1$.

Согласно описанному в § 4.3 алгоритму инвариантные решения уравнений (4.40) при условии (4.42) нужно искать в виде

$$\tilde{u} = (1 - \alpha x)^2 U(\xi), \quad \tilde{v} = V(\xi) \quad (4.43)$$

с $\xi = \frac{t}{(1-\alpha x)^4}$. Подставляя (4.43) в уравнения (4.40) и выбирая
 $g_1 = g_2 = g_4 = g_5 = h_1 = h_2 = h_4 = 0, \quad g_3 = 2\alpha U,$
 $h_3 = h_5 = 4\alpha V, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2\alpha,$

получаем

$$U' = A [4\alpha\xi U' + 4\alpha(\xi V' + V) + 1], \quad (4.44)$$

$$\xi V' + V = B [U + 4\alpha\xi U'] + \xi A [4\alpha(\xi V' + V) + 1]. \quad (4.45)$$

Ищется решение этой системы, удовлетворяющее начальному условию

$$U(0) = 0. \quad (4.46)$$

Таким образом, поставленная цель — редукция задачи к более простой — достигнута: вопрос о существовании аналитического решения исходной задачи, как и в предыдущем случае, свелся к соответствующему вопросу для обыкновенных дифференциальных уравнений. Если найдется решение типа мажоранты (т. е. аналитические функции $U(\xi)$ и $V(\xi)$ с неотрицательными коэффициентами их тейлоровских разложений) задачи (4.44) — (4.46), то по формулам (4.43) определятся $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, которые также будут функциями типа мажоранты ($U(0) = 0!$).

Для полноты изложения докажем существование аналитического решения задачи (4.44) — (4.46). Первое уравнение можно разрешить относительно U' , а второе — относительно $\xi V' + V$:

$$U' = \frac{1}{1-4\alpha\xi A} [1 + 4\alpha(\xi V' + V)],$$

$$\xi V' + V = \frac{1}{1-4\alpha\xi A} [\xi A + BU + 4\alpha\xi BU'],$$

причем $\frac{1}{1-4\alpha\xi A} \gg 0$ для малых значений ξ . Из этих уравнений находятся

$$U' = F(\xi, U, V), \quad (4.47)$$

$$\xi V' + V = UB(\xi, U, \xi V) + \xi H(\xi, U, V) \quad (4.48)$$

с функциями F и H типа мажорант. Поэтому решение определяется в виде рядов $U(\xi)$, $V(\xi)$ с неотрицательными коэффициентами. Из (4.48) путем дифференцирований в точке $\xi = 0$ получаются соотношения

$$V^{(n)}(0) = \frac{n}{n+1} \frac{d^{n-1}H}{d\xi^{n-1}}(0) + \frac{1}{n+1} \frac{d^n(UB)}{d\xi^n}(0),$$

справедливые для всех $n = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что мажорантной задачей для (4.47), (4.48), (4.46) является

$$\tilde{U}' = F(\xi, \tilde{U}, \tilde{V}),$$

$$V' = H(\xi, \tilde{U}, \tilde{V}) + \frac{d}{d\xi} [\tilde{U}B(\xi, \tilde{U}, \xi \tilde{V})],$$

$$\tilde{U}(0) = \tilde{V}(0) = 0.$$

Написанная система дифференциальных уравнений для \tilde{U} и \tilde{V} после подстановки во второе уравнение значения \tilde{U}' из первого уравнения и разрешения относительно величины \tilde{V}' (это возможно при малых ξ) становится системой типа Коши—Ковалевской. Применение теоремы Коши—Ковалевской завершает доказательство.

Замечание 1. Аналогично рассматривается случай нескольких переменных x^1, \dots, x^n . При этом используется группа G_n , состоящая из переносов и растяжений.

Замечание 2. Использование группы переносов в теореме Коши—Ковалевской не является обязательным. Например, в основу доказательства можно было бы положить также группу растяжений. Если, скажем, рассматривается задача (4.23) с $n=1$, то, рассуждая как во втором примере, приходим к мажорантной задаче

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t &= \frac{A}{1-\alpha x} \left(\tilde{u}_x + \frac{1}{1-\alpha x} \right), \\ \tilde{u}|_{t=0} &\geqslant 0,\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{C}{(1-\beta t(1-\alpha x)^{-2})(1-\gamma \tilde{u})},$$

а C, α, β, γ —подходящим образом выбранные неотрицательные постоянные. Мажорантное уравнение допускает группу растяжений

$$(1-\alpha x) \mapsto \tau(1-\alpha x), \quad t \mapsto \tau^2 t, \quad \tilde{u} \mapsto \tilde{u}.$$

Соответствующее инвариантное решение

$$\tilde{u} = U(\xi), \quad \xi = \frac{t}{(1-\alpha x)^2}$$

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U' = \frac{A(\xi, U)}{1-2\alpha\xi A(\xi, U)}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $U(0)=0$, при малых ξ представляет собой мажоранту для исходной задачи.

Замечание 3. Выше рассматривались примеры со скалярными функциями u, v . Легко видеть, что приведенные доказательства с небольшими изменениями переносятся на случай векторов u, v .

§ 5. Примеры

5.1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$. Преобразования

$$x' = xe^a$$

образуют однопараметрическую группу с законом умножения $\varphi(a, b) = a + b$. Эта группа называется *группой растяжений*