Написанная система дифференциальных уравнений для $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ после подстановки во второе уравнение значения $\tilde{U}'$ из первого уравнения и разрешения относительно величины $\tilde{V}'$ (это возможно при малых ξ) становится системой типа Коши—Ковалевской. Применение теоремы Коши—Ковалевской завершает доказательство.

Замечание 1. Аналогично рассматривается случай нескольких переменных $x^1, \ldots, x^n$. При этом используется группа G_n, состоящая из переносов и растяжений.

Замечание 2. Использование группы переносов в теореме Коши—Ковалевской не является обязательным. Например, в основу доказательства можно было бы положить также группу растяжений. Если, скажем, рассматривается задача (4.23) с $n=1$, то, рассуждая как во втором примере, приходим к мажорантной задаче

$$\tilde{u}_t = \frac{A}{1-\alpha x}\left(\tilde{u}_x + \frac{1}{1-\alpha x}\right),$$

$$\tilde{u}\,|_{t=0} \gg 0,$$

где

$$A = \frac{C}{(1-\beta t\,(1-\alpha x)^{-2})\,(1-\gamma\tilde{u})},$$

а C, α, β, γ—подходящим образом выбранные неотрицательные постоянные. Мажорантное уравнение допускает группу растяжений

$$(1-\alpha x) \mapsto \tau\,(1-\alpha x), \quad t \mapsto \tau^2 t, \quad \tilde{u} \mapsto \tilde{u}.$$

Соответствующее инвариантное решение

$$\tilde{u} = U(\xi), \quad \xi = \frac{t}{(1-\alpha x)^2}$$

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U' = \frac{A(\xi,\ U)}{1-2\alpha\xi A(\xi,\ U)}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $U(0)=0$, при малых ξ представляет собой мажоранту для исходной задачи.

Замечание 3. Выше расматривались примеры со скалярными функциями u, v. Легко видеть, что приведенные доказательства с небольшими изменениями переносятся на случай векторов u, v.

§ 5. Примеры

5.1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$. Преобразования

$$x' = xe^a$$

образуют однопараметрическую группу с законом умножения $\varphi(a,\ b) = a+b$. Эта группа называется *группой растяжений*

в пространстве $\mathbb{R}^n$. Каждое преобразование состоит здесь в умножении всех векторов x из $\mathbb{R}^n$ на одно и то же вещественное число. Группой растяжений называется также группа более общих преобразований

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1 e^{a\lambda_1}, \ldots, x^n e^{a\lambda_n}),$$

где λ_i — некоторые произвольно заданные вещественные числа, $a \in \mathbb{R}$ — групповой параметр. Преобразования этой группы записываются также в виде $x' = (a^{\lambda_1} x^1, \ldots, a^{\lambda_n} x^n)$ с очевидной заменой группового параметра. Инфинитезимальный оператор группы растяжений равен

$$X = \lambda_1 x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \lambda_n x^n \frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{5.1}$$

Многообразие, заданное уравнением

$$F(x) \equiv x^1 - \sum_{i=2}^{n} (x^i)^2 = 0,$$

инвариантно относительно группы растяжений

$$x' = (a^2 x^1, ax^2, \ldots, ax^n),$$

так как $F(x') = a^2 F(x)$; выполнение инфинитезимального критерия (3.21) видно из равенства $XF(x) = 2F(x)$, где X — оператор (5.1) с $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $a = (l, \theta)$ с $l \in \mathbb{R}^2$, $-\pi < \theta < \pi$. Преобразования (3.2), заданные отображением

$$f(x, a) = A(\theta) x + l,$$

где

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

образуют 3-параметрическую группу преобразований в $\mathbb{R}^2$, которая называется *группой изометрических движений в плоскости*. Закон умножения в этой группе имеет вид $\varphi(a_1, a_2) = (A(\theta_2) l_1 + l_2, \theta_1 + \theta_2)$, где $a_i = (l_i, \theta_i)$, $i = 1, 2$. Одномерная подгруппа этой группы, соответствующая значению $l = 0$, представляет собой группу вращений в $\mathbb{R}^2$ с оператором

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Полагая теперь $\theta = 0$, $l = tl_0$, где l_0 — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^2$, t — вещественный параметр, получаем другую однопараметрическую подгруппу, представляющую собой *группу переносов* в направлении вектора l_0. Группа переносов в $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$x \mapsto x + al_0,$$

где l_0 — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$, a — вещественный групповой параметр.

Группа изометрических движений в $\mathbb{R}^3$ представляет собой 6-параметрическую группу, образованную переносами и вращениями. Стандартный базис алгебры Ли L_6 этой группы состоит из операторов

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Разложение Леви (2.5) алгебры L_6 реализуют радикал R с базисом $\{X_1,\ X_2,\ X_3\}$ и фактор Леви N с базисом $\{X_{12},\ X_{23},\ X_{31}\}$.

5.2. Алгоритм вычисления группы, допускаемой дифференциальными уравнениями, иллюстрируется на примере уравнения второго порядка

$$u_x u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{5.2}$$

описывающего стационарное околозвуковое течение газа. Пусть

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \tag{5.3}$$

— искомый оператор, а

$$\underset{2}{X} = X + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_y} + \zeta_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{12} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial u_{yy}}$$

— его второе продолжение. Определяющее уравнение (4.12) в данном случае имеет вид

$$(u_{xx}\zeta_1 + u_x\zeta_{11} + \zeta_{22})_{u_{yy} = -u_x u_{xx}} = 0. \tag{5.4}$$

Формулы продолжения (4.8), (4.10) дают

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi^1) - u_y D_x(\xi^2) = \\
&= \eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi^1_x - (u_x)^2\xi^1_u - u_y\xi^2_x - u_x u_y \xi^2_u, \\
\zeta_2 &= D_y(\eta) - u_x D_y(\xi^1) - u_y D_y(\xi^2) = \\
&= \eta_y + u_y\eta_u - u_x\xi^1_y - u_x u_y \xi^1_u - u_y\xi^2_y - (u_y)^2\xi^2_u, \\
\zeta_{11} &= D_x(\zeta_1) - u_{xx} D_x(\xi^1) - u_{xy} D_x(\xi^2) = \\
&= \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_{xx}\eta_u + (u_x)^2\eta_{uu} - 2u_{xx}\xi^1_x - u_x\xi^1_{xx} - \\
&\quad - 2(u_x)^2\xi^1_{xu} - 3u_x u_{xx}\xi^1_u - (u_x)^3\xi^1_{uu} - 2u_{xy}\xi^2_x - u_y\xi^2_{xx} - \\
&\quad - 2u_x u_y \xi^2_{xu} - (u_y u_{xx} + 2u_x u_{xy})\xi^2_u - (u_x)^2 u_y \xi^2_{uu}, \\
\zeta_{22} &= D_y(\zeta_2) - u_{xy} D_y(\xi^1) - u_{yy} D_y(\xi^2) = \\
&= \eta_{yy} + 2u_y\eta_{yu} + u_{yy}\eta_u + (u_y)^2\eta_{uu} - 2u_{xy}\xi^1_y - u_x\xi^1_{yy} - \\
&\quad - 2u_x u_y \xi^1_{yu} - (u_x u_{yy} + 2u_y u_{xy})\xi^1_u - u_x(u_y)^2\xi^1_{uu} - \\
&\quad - 2u_{yy}\xi^2_y - u_y\xi^2_{yy} - 2(u_y)^2\xi^2_{yu} - 3u_y u_{yy}\xi^2_u - (u_y)^3\xi^2_{uu}.
\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в левую часть уравнения (5.4) и выделим сначала члены, содержащие переменную u_{xy}:

$$-2u_{xy}(\xi^1_y + u_x\xi^2_x + u_y\xi^1_u + (u_x)^2\xi^2_u).$$

Мы должны приравнять нулю каждое слагаемое в этом выражении, так как в уравнении (5.4) величины x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} играют роль независимых переменных, а искомые функции ξ^i, η зависят только от x, y, u. Следовательно,

$$\xi^1_y=0, \quad \xi^1_u=0, \quad \xi^2_x=0, \quad \xi^2_u=0. \tag{5.5}$$

Коэффициент при u_{xx} (с учетом (5.5)) равен $\eta_x+u_x(\eta_u-3\xi^1_x-2\xi^2_y)$, поэтому из тех же соображений имеем

$$\eta_x=0, \tag{5.6}$$

$$\eta_u=3\xi^1_x-2\xi^2_y. \tag{5.7}$$

Из (5.7), (5.5), (5.6) получаем

$$\eta_{uu}=0, \quad \xi^1_{xx}=0. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.4) принимает теперь следующий вид:

$$\eta_{yy}+u_y(2\eta_{yu}-\xi^2_{yy})=0,$$

откуда

$$\eta_{yy}=0, \tag{5.9}$$

$$2\eta_{yu}=\xi^2_{yy}. \tag{5.10}$$

Уравнение (5.10) с учетом (5.7) дает

$$\xi^2_{yy}=0, \quad \eta_{yu}=0.$$

Следовательно, ξ^1 и ξ^2 являются линейными функциями от x и y соответственно, а η—линейной функцией от y, u, причем зависимость η от u определяется соотношением (5.7). Окончательно получается общее решение определяющего уравнения (5.4):

$$\xi^1=C_1x+C_2, \quad \xi^2=C_3y+C_4, \quad \eta=(3C_1-2C_3)u+C_5y+C_6,$$

зависящее от шести произвольных постоянных C_i $(i=1, \ldots, 6)$. Полагая здесь поочередно одну из постоянных C_i равной 1, а остальные равными 0, имеем следующий базис полученной алгебры Ли:

$$\begin{gathered} X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3=\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4=y\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_5=x\frac{\partial}{\partial x}+3u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6=y\frac{\partial}{\partial y}-2u\frac{\partial}{\partial u}. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Таким образом, решения уравнения (5.4) образуют 6-мерную алгебру Ли, и, следовательно, максимальная группа точечных преобразований, допускаемая уравнением (5.2), является 6-параметрической.

5.3. Уравнение Кортевега—де Фриза

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{5.12}$$

инвариантно относительно 4-параметрической группы, порожденной однопараметрическими группами переносов

$$t \mapsto t + a, \tag{5.13}$$

$$x \mapsto x + a, \tag{5.14}$$

преобразований Галилея

$$x \mapsto x + ta, \quad u \mapsto u + a \tag{5.15}$$

и растяжений

$$t \mapsto a^3 t, \quad x \mapsto ax, \quad u \mapsto a^{-2} u. \tag{5.16}$$

Базис алгебры Ли L_4 этой группы образуют инфинитезимальные операторы указанных преобразований:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{5.17}$$

Элементы X алгебры L_4 в базисе (5.17) записываются в виде

$$X = \sum_{i=1}^{4} e^i X_i. \tag{5.18}$$

Опишем все инвариантные решения ранга $\rho = 1$ уравнения (5.12). Для этого сначала строится оптимальная система θ_1 одномерных подалгебр алгебры L_4. Группа внутренних автоморфизмов алгебры L_4 легко строится по присоединенной алгебре L_4^A (§ 2.6) и представляет собой 4-параметрическую группу линейных преобразований операторов (5.18) в операторы $X' = \sum_{i=1}^{4} e'^i X_i$:

$$\begin{aligned} e'^1 &= a_4^{-3} e^1 + 3a_1 e^4, \\ e'^2 &= -a_3 a_4^{-3} e^1 + a_4^{-1} e^2 + a_1 a_4^2 e^3 + (a_2 - 2a_1 a_3) e^4, \\ e'^3 &= a_4^2 e^3 - 2a_3 e^4, \\ e'^4 &= e^4. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Параметры a_1, a_2, a_3 преобразований (5.19) могут принимать произвольные вещественные значения, а параметр a_4 — любые положительные значения. Если $e^4 \neq 0$, то первые три уравнения системы (5.19) разрешимы относительно параметров a_1, a_2, a_3 при любых значениях координат e^i, e'^i, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, при $e^4 \neq 0$ можно считать $e^4 = 1$, так как инфинитезимальные операторы определены с точностью до умножения на постоянный множитель. Следовательно, все векторы (5.18) с отличной от нуля компонентой e^4 подобны между собой, и в качестве их представителя можно выбрать X_4. В случае $e^4 = 0$ простым перебором устанавливается, что всякий вектор $X = \sum_{i=1}^{3} e^i X_i$ подобен одному из следующих неподобных между собой операторов: X_1, X_2, X_3, $X_1 + X_3$, $X_1 - X_3$. Таким образом, искомая оптимальная

система θ_1 состоит из шести неподобных операторов:

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_1+X_3,\ X_1-X_3. \tag{5.20}$$

Если для каждого из этих операторов построить инвариантное решение ранга $\rho=1$, то из них преобразованиями (5.13)—(5.16) можно получить все инвариантные решения ранга 1.

Для однопараметрической подгруппы с оператором X_1 в качестве базиса можно взять инварианты $J_1=u$, $J_2=x$. В результате получается стационарное решение $u=\varphi(x)$, которое определяется из обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка $\varphi'''+\varphi\varphi'=0$. Это уравнение можно дважды проинтегрировать (второй раз после умножения на $2\varphi'$) в предположении $\varphi\to-c=\text{const}$, φ', $\varphi''\to 0$ при $|x|\to\infty$. Полученное уравнение первого порядка $\varphi'^2+\frac{1}{3}\varphi^3-c^2\varphi=0$ при дополнительном условии $\varphi'(0)=0$ дает

$$\varphi(x)=c\left(3\,\mathrm{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}x-1\right). \tag{5.21}$$

Оператор X_2 имеет инварианты $J_1=u$, $J_2=t$; соответствующее инвариантное решение $u=u(t)$ тривиально: $u=\text{const}$. Для X_3 с базисом инвариантов $J_1=u-\frac{x}{t}$, $J_2=t$ инвариантное решение имеет вид $u=\frac{x}{t}+v(t)$. Подстановка этого выражения в уравнение (5.12) дает $v=\frac{c}{t}$, $c=\text{const}$, т. е. $u=\frac{x+c}{t}$.

Базис инвариантов для X_4 образуют $J_1=ut^{2/3}$, $J_2=x^3t^{-1}$, и формулы (4.17), (4.18) принимают вид

$$u=t^{-2/3}v(y),\quad y=x^3t^{-1}.$$

Подстановкой в (5.12) получается следующее уравнение для $v(y)$:

$$9y^2v'''+18yv''+\left(\frac{16}{9}+y^{2/3}v\right)v'-\frac{1}{3}yv=0.$$

Для X_1+X_3 имеем $J_1=u-t$, $J_2=x-\frac{t^2}{2}$. В этом случае инвариантное решение $u=t+v(y)$, $y=x-\frac{t^2}{2}$ находится из уравнения

$$v'''+vv'+1=0.$$

Оператор X_1-X_3 дает инвариантное решение $u=-t+v(y)$, $y=x+\frac{t^2}{2}$, определяемое из уравнения

$$v'''+vv'-1=0.$$

В приложениях могут оказаться интересными другие инвариантные решения, отличающиеся от приведенных выше канони-

ческих представителей инвариантных решений. Например, хорошо известное решение вида бегущей волны

$$u=\psi(x-ct), \qquad c=\text{const}, \tag{5.22}$$

представляет собой инвариантное решение для однопараметрической подгруппы с инфинитезимальным оператором X_1+cX_2, подобной подгруппе с оператором X_1. В соответствии с этим солитонное решение (5.22) подобно стационарному решению (5.21) и получается из него заменой $x=\bar{x}-ct$, $u=\bar{u}-c$. При этом $\psi=\varphi+c$. Физически важные многосолитонные решения также представляют собой инвариантные решения. Для их получения недостаточно использовать только точечные преобразования, а нужно воспользоваться теорией групп касательных преобразований высшего порядка, или преобразований Ли—Беклунда, изложенной во второй части книги.

5.4. Рассмотрим уравнения движения политропного газа

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho}\nabla p=0,\\ &\rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\\ &p_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+\gamma p\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \qquad \gamma=\text{const}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

где вектор скорости $\boldsymbol{v}=(v^1, \ldots, v^n)$, давление p и плотность ρ являются функциями времени t и пространственного вектора $\boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^n)$, число n принимает значения 1, 2 и 3 соответственно для одномерного, плоского и пространственного течений газа, а операторы ∇ и div выполняются относительно переменных x^i. Групповая классификация уравнений газовой динамики показывает (Овсянников [2], § 22), что при произвольном показателе адиабаты γ группа, допускаемая уравнениями (5.23), зависит от $4+\frac{1}{2}n(n+3)$ параметров и имеет следующие базисные инфинитезимальные операторы:

$$\begin{aligned} &X_0=\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j}+v^j\frac{\partial}{\partial v^i}-v^j\frac{\partial}{\partial v^i},\\ &Y_i=t\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial v^i}, \quad Z_1=t\frac{\partial}{\partial t}+x^i\frac{\partial}{\partial x^i},\\ &\quad = t\frac{\partial}{\partial t}-v^i\frac{\partial}{\partial v^i}+2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}, \quad Z_3=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+p\frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

В случае

$$\gamma=\frac{n+2}{n} \tag{5.25}$$

происходит расширение группы: к (5.24) добавляется оператор

$$X_+=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}+(x^i-tv^i)\frac{\partial}{\partial v^i}-nt\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-(n+2)\,tp\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.26}$$

Используя оператор (5.26), можно построить инвариантные решения, описывающие течения ограниченного объема газа со специальным значением (5.25) показателя адиабаты (Ибрагимов [2]).

В качестве примера рассмотрим случай $n=2$ и найдем инвариантные решения относительно двухпараметрической группы, порожденной операторами X_{12} и X_0+X_+. При этом вместо декартовых координат (x^1, x^2) и (v^1, v^2) удобнее пользоваться полярными координатами (r, φ) и (v_r, v_φ):

$$\begin{aligned} x^1 &= r\cos\varphi, \quad v_r = v^1\cos\varphi + v^2\sin\varphi, \\ x^2 &= r\sin\varphi; \quad v_\varphi = v^2\cos\varphi - v^1\sin\varphi. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Преобразование инфинитезимальных операторов (5.24) при указанной замене переменных легко находится из условия инвариантности дифференциальных операторов первого порядка относительно точечных преобразований: если $y=(x^1, x^2, v^1, \ldots, p)$, $y'=y'(y)$, то

$$X \equiv \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \xi'^i \frac{\partial}{\partial y'^i} \Rightarrow \xi'^i = \xi^k \frac{\partial y'^i}{\partial y^k} \equiv X(y'^i).$$

Например,

$$X_{12}(r) = x^2\frac{\partial r}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial r}{\partial x^2} = 0, \quad X_{12}(\varphi) = X_{12}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right) = -1,$$

$$X_{12}(v_r) = -v^1\sin\varphi\, X_{12}(\varphi) + v^2\cos\varphi\, X_{12}(\varphi) + v^2\cos\varphi - v^1\sin\varphi = 0,$$

$$X_{12}(v_\varphi) = -v^2\sin\varphi\, X_{12}(\varphi) - v^1\cos\varphi\, X_{12}(\varphi) - v^1\cos\varphi - v^2\sin\varphi = 0;$$

следовательно, $X_{12} = -\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. Аналогичные вычисления дают

$$X_0 + X_+ = (1+t^2)\frac{\partial}{\partial t} + tr\frac{\partial}{\partial r} + (r - tv_r)\frac{\partial}{\partial v_r} - tv_\varphi\frac{\partial}{\partial v_\varphi} - \\ -2t\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - 4tp\frac{\partial}{\partial p}.$$

Из системы уравнений

$$X_{12}J = 0, \quad (X_0 + X_+)J = 0$$

находится следующий базис инвариантов:

$$J_1 = rv_r - \frac{tr^2}{1+t^2}, \quad J_2 = rv_\varphi, \quad J_3 = (1+t^2)\rho,$$

$$J_4 = (1+t^2)^2 p, \quad J_5 = \frac{r}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Поэтому инвариантное решение ищется в виде

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{tr}{1+t^2} + \frac{1}{r}U(\lambda), \quad v_\varphi = \frac{1}{r}V(\lambda), \\ \rho &= \frac{1}{1+t^2}R(\lambda), \quad p = \frac{1}{(1+t^2)^2}P(\lambda), \quad \lambda = \frac{r}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Так как при $n=2$ формула (5.25) дает $\gamma=2$, то уравнения газовой динамики (5.23) после подстановки

$$p=\frac{1}{2}\rho^2 \tag{5.29}$$

переходят в уравнения движения «мелкой воды»

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla\rho=0,\\ &\rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0; \end{aligned} \tag{5.30}$$

здесь величина ρ при соответствующем выборе единиц измерения обозначает высоту воды над ровным дном. Группа, допускаемая уравнениями (5.30), получается из соответствующей группы для газовой динамики путем наложения требования инвариантности равенства (5.29). При этом операторы X_0, X_i, X_{12}, Y_i, Z_1 остаются без изменения, а из операторов Z_2 и Z_3 образуется их линейная комбинация Z_2-4Z_3, сохраняющая равенство (5.29), которая после замены переменной p ее значением $p=\frac{1}{2}\rho^2$ принимает вид

$$Z_2'=t\frac{\partial}{\partial t}-v^i\frac{\partial}{\partial v^i}-2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Оператор (5.26) после замены (5.29) принимает вид

$$X_+'=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}+(x^i-tv^i)\frac{\partial}{\partial v^i}-2t\rho\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Пользуясь этой интерпретацией уравнений газовой динамики и инвариантными решениями (5.28), можно описать некоторые специальные виды течений мелкой воды под действием силы тяжести при определенных начальных условиях.

Подстановка функций v_r, v_φ и ρ, определенных формулами (5.28), в уравнения (5.30), записанные в полярных координатах, дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda UU'-U^2-V^2+\lambda^3R'+\lambda^4&=0,\\ UV'&=0,\\ (UR)'&=0 \end{aligned}$$

для функций U, V, R от λ. Рассмотрим простое решение этой системы, получающееся при $U=0$. В этом случае V может быть произвольной функцией от λ, а $R=\int V^2(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^3}-\frac{1}{2}\lambda^2+C$, $C=\text{const}$. В частном случае $V=0$ полученное решение описывает растекание под действием силы тяжести ограниченной массы воды, в начальный момент $t=0$ находящейся в покое и имеющей форму

$$\rho=\begin{cases}\frac{1}{2}(a^2-r^2), & r\leqslant a,\\ 0, & r>a,\end{cases}$$

где a — положительная постоянная. Решение задачи дается формулами

$$v_r = \frac{tr}{1+t^2}, \quad v_\varphi = 0, \quad \rho = \frac{1}{2(1+t^2)}\left(a^2 - \frac{r^2}{1+t^2}\right),$$

откуда видно, что граница воды ($\rho = 0$) движется по закону $r = a\sqrt{1+t^2}$, а высота вершины, находящейся в точке $r = 0$, убывает со временем в соответствии с формулой $\rho_{\max} = \frac{a^2}{2(1+t^2)}$. Скорость течения в этом решении остается ограниченной: $|\boldsymbol{v}| = v_r < a$. Это решение можно видоизменить путем добавления вращения жидкости как твердого тела, если в качестве $V(\lambda)$ выбрать функцию $V = b\lambda^2$, $b = \text{const}$. Другое интересное решение получается при $V = \alpha\lambda$, $\alpha = \text{const}$. Соответствующее решение

$$v_r = \frac{tr}{1+t^2}, \quad v_\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \rho = \frac{1}{1+t^2}\left(C - \frac{r^2}{2(1+t^2)} + \alpha^2 \ln \frac{r}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

уравнений (5.30) легко анализируется. Оно, в частности, описывает движение кольцеобразно распределенной массы воды с заданной начальной угловой скоростью $\omega = \frac{\alpha}{r}$. При растекании воды под действием сил тяжести и вращения угловая скорость убывает по формуле $\omega = \frac{\alpha}{r\sqrt{1+t^2}}$, а граница воды на дне состоит из двух концентрических окружностей, радиусы которых увеличиваются со временем по формулам

$$r_1 = r_1^0\sqrt{1+t^2}, \quad r_2 = r_2^0\sqrt{1+t^2},$$

если при $t = 0$ радиусы граничных окружностей были равны $r_1^0 > 0$ и $r_2^0 > r_1^0$. Полученные решения допускают сопряжение друг с другом через контактный разрыв. Обсуждение этого вопроса, а также более подробный анализ инвариантных решений вида (5.28) имеются в статье Хабирова [1].

Читатель, интересующийся применением теоретико-групповых методов в механике, может обратиться к книгам: Биркгоф [1], Седов [1], Овсянников [4], Ames [1], Bluman & Cole [1], а также к обзору Овсянникова и Ибрагимова [1], содержащему подробную библиографию, и к Proceedings [1, 2].