ГЛАВА 1

ДВИЖЕНИЯ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 6. Общая группа движений

6.1. Локальные римановы многообразия. Пусть M — риманово многообразие, т. е. дифференцируемое многообразие, на котором задан метрический тензор — гладкое симметричное ковариантное тензорное поле порядка 2. В соответствии с локальным характером изучаемых задач римановы многообразия рассматриваются в дальнейшем локально, и *n-мерным римановым пространством* V_n называется локальное риманово многообразие, представляющее собой открытое множество из $\mathbb{R}^n$, диффеоморфное окрестности n-мерного риманова многообразия M. При этом удобно пользоваться следующей трактовкой метрического тензора риманова пространства V_n.

Пусть x^i, y_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ — вещественные переменные. Рассматриваются вещественные функции $g_{ij}(x)$ $(i, j=1, \ldots, n)$, определенные на открытом множестве $V_n \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие условиям

$$g_{ij}(x)=g_{ji}(x), \quad \det[g_{ij}(x)] \neq 0.$$

Пусть $\mathfrak{G}$ — n-мерное локальное многообразие в пространстве переменных $x=(x^1, \ldots, x^n)$, $y=(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{nn})$, заданное уравнениями

$$y_{ij}=g_{ij}(x) \qquad (i, j=1, \ldots, n). \tag{6.1}$$

Многообразие $\overline{\mathfrak{G}}$, заданное уравнениями

$$y_{ij}=\overline{g}_{ij}(x),$$

называется *эквивалентным* многообразию $\mathfrak{G}$ $(\overline{\mathfrak{G}} \sim \mathfrak{G})$, если система дифференциальных уравнений

$$\overline{g}_{kl}(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j}=g_{ij}(x) \qquad (i, j=1, \ldots, n) \tag{6.2}$$

имеет непрерывно дифференцируемое решение

$$f=(f^1, \ldots, f^n),$$

удовлетворяющее условию $\det f' \neq 0$ (f' — производная f). При этом множество всех многообразий $\mathfrak{G}$, заданных уравнениями (6.1), разбивается на классы эквивалентных многообразий. Каждый класс эквивалентности называется *метрическим тензором* и обозначается g_{ij}. Если $\bar{\mathfrak{G}} \sim \mathfrak{G}$, то будем говорить, что многообразие $\mathfrak{G}$ (или, что то же самое, уравнения (6.1)) задает метрический тензор риманова пространства V_n в системе координат $\{x^i\}$, а многообразие $\bar{\mathfrak{G}}$ — в системе координат $\{\bar{x}^i\}$, где $\bar{x}^i = f^i(x)$, f — решение уравнений (6.2).

Выясним, с каким произволом определяется система координат в римановом пространстве V_n заданием многообразия $\mathfrak{G}$ (т. е. функций $g_{ij}(x)$). Пусть при преобразовании координат $\bar{x}^i = f^i(x)$ функции $g_{ij}(x)$, определяющие многообразие $\mathfrak{G}$, не изменяются. В силу уравнений (6.2) функция f удовлетворяет уравнениям

$$g_{kl}(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j} = g_{ij}(x) \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n). \tag{6.3}$$

Уравнения (6.3) определяют преобразования, сохраняющие основную метрическую форму

$$ds^2 = g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j \tag{6.4}$$

риманова пространства V_n с метрическим тензором g_{ij}, т. е. изометрические движения в пространстве V_n (см. § 7.1). Таким образом, задание многообразия $\mathfrak{G}$ определяет систему координат в римановом пространстве с точностью до изометрических движений. Поэтому мы будем отождествлять (с указанной точностью) систему координат в V_n с многообразием $\mathfrak{G}$.

В дальнейшем особый интерес будут представлять римановы пространства, метрические формы (6.4) которых имеют сигнатуру $(- \ldots - +)$. Это означает, что в некоторой окрестности каждой точки $x \in V_n$ существует замена координат, приводящая форму (6.4) в точке x к виду

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - \ldots - (dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2.$$

Такие римановы пространства V_n называются *лоренцевыми пространствами* или *пространствами гиперболического типа* (Адамар [1]), так как в этом случае линейные дифференциальные уравнения второго порядка со старшими коэффициентами $g^{ij}(x)$ ($g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$) имеют гиперболический тип.

Метрическая форма (6.4) не зависит от выбора системы координат и задает длину ds касательного вектора $dx = (dx^1,\ \ldots,\ dx^n)$ к V_n в точке $x \in V_n$. Длина s кривой

$$x = x(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{6.5}$$

соединяющей точки x_0, x_1 в пространстве V_n, определяется

интегралом

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}\,dt, \tag{6.6}$$

где

$$\mathscr{L}=\sqrt{g_{ij}(x)\,\dot{x}^i\dot{x}^j}\,,\quad \dot{x}^i=\frac{dx^i(t)}{dt}\,.$$

Кривая (6.5), являющаяся экстремалью интеграла (6.6), т. е. решением уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^i}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^i}=0\qquad(i=1,\ldots,n), \tag{6.7}$$

называется *геодезической*, соединяющей точки x_0, x_1 пространства V_n. Взяв в качестве параметра кривой (6.5) длину дуги s, отсчитываемую от точки x_0, получим из уравнений (6.7) следующую форму уравнений геодезических в пространстве V_n:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0\qquad(i=1,\ldots,n). \tag{6.8}$$

Коэффициенты этих уравнений вычисляются по формулам

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right) \tag{6.9}$$

и называются *символами Кристоффеля*.

С помощью символов Кристоффеля определяется операция ковариантного дифференцирования тензоров в римановом пространстве V_n, приводящая снова к тензорам. Ковариантное дифференцирование будет обозначаться нижним индексом, написанным после запятой. Например,

$$a_{,i}=\frac{\partial a}{\partial x^i},\quad a_{i,j}=\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-a_k\Gamma^k_{ij},\quad a^i_{,j}=\frac{\partial a^i}{\partial x^j}+a^k\Gamma^i_{kj},$$

и т. д. При повторном ковариантном дифференцировании условимся писать только одну запятую; например, $a_{i,jk}\equiv a_{i,j,k}$.

Если a—скаляр, то

$$a_{,ij}=a_{,ji}.$$

Однако для тензоров, вообще говоря, повторное дифференцирование зависит от порядка дифференцирования. А именно,

$$a_{i,jk}=a_{i,kj}+a_lR^l_{ijk},\quad a^i_{,jk}=a^i_{,kj}-a^lR^i_{ljk}$$

и т. д., где величины

$$R^l_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial x^k}+\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj}-\Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} \tag{6.10}$$

представляют собой компоненты тензора, называемого *тензором Римана—Кристоффеля*. Из приведенных формул повторного дифференцирования следует, что последовательные ковариантные дифференцирования тензоров перестановочны тогда и только тогда, когда

$$R^l_{ijk}=0 \qquad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ \ldots,\ n). \tag{6.11}$$

Риманово пространство, удовлетворяющее условию (6.11), называется *плоским* и обозначается S_n.

Из тензора Римана—Кристоффеля R^l_{ijk} свертыванием по индексам l и k получается *тензор Риччи*

$$R_{ij}\equiv R^k_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^k_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl}-\Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{lk}. \tag{6.12}$$

Умножив тензор Риччи на g^{ij} и произведя свертывание, получим *скалярную кривизну* пространства V_n:

$$R=g^{ij}R_{ij}. \tag{6.13}$$

При рассмотрении конформных преобразований римановых пространств используется *тензор Вейля* ($n>3$)

$$C^l_{ijk}=R^l_{ijk}+\frac{1}{n-2}(\delta^l_jR_{ik}-\delta^l_kR_{ij}+g_{ik}R^l_j-g_{ij}R^l_k)+$$
$$+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_kg_{ij}-\delta^l_jg_{ik}). \tag{6.14}$$

В частности, пространство V_n конформно плоскому пространству тогда и только тогда, когда (см. Эйзенхарт [2], § 28)

$$C^l_{ijk}=0 \qquad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ \ldots,\ n). \tag{6.15}$$

Для произвольной функции $u=u(x)$ выражения

$$\Delta_1u=g^{ij}u_{,i}u_{,j}\equiv g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}, \tag{6.16}$$

$$\Delta_2u=g^{ij}u_{,ij}\equiv g^{ij}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^i\,\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right) \tag{6.17}$$

не зависят от выбора системы координат в V_n. Эти инвариантные выражения называются *дифференциальными параметрами Бельтрами первого* и *второго рода* соответственно.

6.2. Произвольные движения в V_n. Преобразования

$$\bar{x}=f(x) \tag{6.18}$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем рассматривать как преобразования в римановом пространстве V_n: точке $x\in V_n$ с координатами x^i ставится в соответствие точка $\bar{x}\in V_n$ с координатами $\bar{x}^i$ в фиксированной системе координат $\{x^i\}$. При преобразованиях (6.18) касательные векторы к V_n преобразуются следующим образом.

Если $dx=(dx^1, \ldots, dx^n)$—касательный вектор в точке $x \in V_n$, то соответствующий ему касательный вектор $d\bar{x}$ в точке $\bar{x} \in V_n$ имеет компоненты

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^k} dx^k.$$

При этом длина ds касательного вектора dx определяется формулой (6.4), а длина $d\bar{s}$ вектора $d\bar{x}$—формулой

$$d\bar{s}^2 = g_{ij}(\bar{x})\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j. \tag{6.19}$$

Для сравнения величин ds и $d\bar{s}$ удобно перейти к касательному пространству в одной точке, например в точке $\bar{x}$, интерпретируя (6.18) как преобразование координат и рассматривая $\bar{x}^i$ как координаты точки x в новой системе координат $\{\bar{x}^i\}$. Ввиду инвариантности метрической формы относительно выбора системы координат формулу (6.4) можно записать в новой системе координат:

$$ds^2 = \bar{g}_{ij}(\bar{x})\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j, \tag{6.20}$$

где $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$—компоненты метрического тензора в системе координат $\{\bar{x}^i\}$, определяемые из уравнений (6.2). Из формул (6.19) и (6.20) следует, что изменение элемента длины ds касательного вектора dx определяется разностью между функциями $g_{ij}(\bar{x})$ и $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$.

Таким образом, изучение изменения длины касательного вектора сводится к изучению соответствующих преобразований функций $g_{ij}(x)$ под действием преобразований (6.8). Более удобным является рассмотрение преобразований не самих функций $g_{ij}(x)$, а преобразований многообразия, задаваемого уравнениями (6.1). При этом наряду с преобразованиями (6.18) переменных x^i следует преобразовывать переменные y_{ij} как компоненты ковариантного тензора:

$$\bar{x}^i = f^i(x), \quad y_{ij} = \bar{y}_{kl} \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^i} \frac{\partial f^l(x)}{\partial x^j}. \tag{6.21}$$

Преобразование (6.18), сопровождаемое преобразованием переменных y_{ij} в соответствии с формулами (6.21), называется в дальнейшем *движением* в римановом пространстве V_n. Множество всех движений (6.18) образует бесконечную локальную группу Ли G_∞ относительно композиции и называется *общей группой движений* в пространстве V_n. Формулы (6.21) продолжают действие группы G_∞ преобразований переменных x на переменные y и определяют продолженную группу $\tilde{G}_\infty$, изоморфную G_∞.

Преобразования (6.21) приводят к следующим формулам продолжения инфинитезимальных операторов однопараметрических групп движений. Пусть G_1 — однопараметрическая группа

движений в V_n:

$$\bar{x}=f(x, a) \tag{6.22}$$

с инфинитезимальным оператором

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6.23}$$

где

$$\xi(x)=\left.\frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Оператор $\tilde{X}$ продолженной группы $\tilde{G}_1$ будет иметь вид

$$\tilde{X}=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta_{ij}\frac{\partial}{\partial y_{ij}},$$

где

$$\eta_{ij}=\left.\frac{\partial \bar{y}_{ij}}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Здесь считается, что из формул (6.21) найдены выражения величин $\bar{y}_{ij}$ через x, y и групповой параметр a. Не выписывая эти выражения, предположим, что они подставлены в формулы (6.21), и продифференцируем получающиеся при этом тождества по параметру a при $a=0$. Используя обозначения (6.23) и условия $\bar{y}_{ij}|_{a=0}=y_{ij}$, в результате такого дифференцирования получаем

$$0=\eta_{kl}\delta_i^k\delta_j^l+y_{kl}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}\delta_j^l+y_{kl}\delta_i^k\frac{\partial\xi^l}{\partial x^j}=$$

$$=\eta_{ij}+y_{kj}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}+y_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j} \qquad (i, j=1, \ldots, n),$$

откуда

$$\eta_{ij}=-\left(y_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}+y_{kj}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}\right).$$

Таким образом, группе G_1 преобразований (6.22) с инфинитезимальным оператором (6.23) соответствует продолженная группа $\tilde{G}_1$ с оператором

$$\tilde{X}=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}-\left(y_{ik}\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^j}+y_{kj}\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y_{ij}}. \tag{6.24}$$

Из формулы (6.24) видно, что если X и Y — операторы двух однопараметрических групп, то $[\tilde{X}, \tilde{Y}]=\widetilde{[X, Y]}$. Поэтому группе G_r движений (6.22) соответствует группа $\tilde{G}_r$ преобразований переменных x, y по формулам (6.21). Если алгебра Ли L_r группы G_r имеет базисные операторы X_ν ($\nu=1, \ldots, r$), причем

$$[X_\mu, X_\nu]=c_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda,$$

то алгебра Ли $\tilde{L}_r$ группы $\tilde{G}_r$ будет иметь базисные операторы $\tilde{X}_\nu (\nu = 1, \ldots, r)$ и те же структурные константы $c^\lambda_{\mu\nu}$, так как

$$[\tilde{X}_\mu, \tilde{X}_\nu] = [\widetilde{X_\mu, X_\nu}] = c^\lambda_{\mu\nu} \tilde{X}_\lambda.$$

При движениях в римановых пространствах с помощью общей группы G_∞ геометрические фигуры перемещаются без сохранения каких-либо своих метрических характеристик — группа G_∞ произвольных движений не имеет геометрических инвариантов. Ниже выделяются подгруппы группы G_∞, позволяющие перемещаться в римановом пространстве V_n с сохранением некоторых (инфинитезимальных) метрических свойств тел. В дальнейшем всякая подгруппа G общей группы движений G_∞ называется *группой движений*. Важной характеристикой группы движений G в пространстве V_n является дефект — целое неотрицательное число $\delta \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$, определяющее количество геометрических инвариантов группы G формулой $\frac{n(n+1)}{2} - \delta$. Дефект $\delta = \delta(V_n, G)$ любой пары (V_n, G) легко вычисляется с помощью производной Ли метрического тензора пространства V_n относительно группы G.

6.3. Дефект группы движений в V_n. Рассматриваются риманово пространство V_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ в системе координат $\{x^i\}$ и группа движений G в V_n. Преобразование $\tilde{T} \in \tilde{G}$ переводит многообразие $\mathfrak{G}$, заданное уравнениями (6.1), в эквивалентное многообразие $\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{T}(\mathfrak{G})$; это следует из построения (6.21) группы $\tilde{G}$. Орбита

$$\tilde{G}(\mathfrak{G}) = \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{G}} \tilde{T}(\mathfrak{G}) \tag{6.25}$$

многообразия $\mathfrak{G}$ представляет собой минимальное инвариантное многообразие группы $\tilde{G}$, содержащее $\mathfrak{G}$ (см. § 3.4). Поскольку $\dim \mathfrak{G} = n$, то формула (3.24) для определения дефекта инвариантности многообразия $\mathfrak{G}$ относительно группы $\tilde{G}$ принимает вид

$$\delta = \dim \tilde{G}(\mathfrak{G}) - n.$$

Пусть векторные поля

$$X_\nu = \xi^i_\nu(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{6.26}$$

образуют базис алгебры Ли L группы G. При фиксированном базисе (6.26) алгебры L производная Ли (см. Yano [1] или Lichnerowicz [2]) метрического тензора g_{ij} относительно группы G представляет собой матрицу $\left[\underset{\nu}{\mathfrak{L}} g_{ij}\right]$:

$$\underset{\nu}{\mathfrak{L}} g_{ij} = \xi_{\nu i, j} + \xi_{\nu j, i}, \tag{6.27}$$

строки которой нумеруются индексом ν, а столбцы — двойным индексом ij. Здесь $\xi_{\nu i}=g_{ik}\xi_\nu^k$ — ковариантные компоненты вектора ξ_ν, индексы i и j, написанные после запятой, обозначают ковариантное дифференцирование в V_n в соответствии с принятым в § 6.1 соглашением.

Лемма. *Дефект инвариантности многообразия $\mathfrak{G}$ относительно группы $\tilde{G}$ равен*

$$\delta(\mathfrak{G}, \tilde{G})=\operatorname{rank}\left[\xi_\nu^k(x)\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}+g_{ik}(x)\frac{\partial \xi_\nu^k(x)}{\partial x^j}+g_{jk}(x)\frac{\partial \xi_\nu^k(x)}{\partial x^i}\right]. \qquad (6.28)$$

Доказательство. В формулу (3.25) нужно подставить вместо M многообразие $\mathfrak{G}$, заданное уравнениями (6.1), и координаты оператора (6.24).

Следствие. *Дефект инвариантности не зависит от выбора системы координат в V_n: если $\overline{\mathfrak{G}}\sim\mathfrak{G}$, то $\delta(\overline{\mathfrak{G}}, \tilde{G})=\delta(\mathfrak{G}, \tilde{G})$.*

Доказательство. Из тождества

$$\xi_\nu^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+g_{ik}\frac{\partial \xi_\nu^k}{\partial x^j}+g_{jk}\frac{\partial \xi_\nu^k}{\partial x^i}=\xi_{\nu i,\,j}+\xi_{\nu j,\,i} \qquad (6.29)$$

следует, что каждая строка матрицы в правой части равенства (6.28) представляет собой ковариантный тензор порядка 2. Поэтому при замене координат в V_n все строки указанной матрицы подвергаются линейному преобразованию, не зависящему от номера ν что, очевидно, не влияет на ранг матрицы. Этим утверждение доказано.

Таким образом, дефект инвариантности многообразия $\mathfrak{G}$ относительно группы $\tilde{G}$ зависит только от пространства V_n и группы движений G в нем. Поэтому корректно следующее

Определение. Пусть многообразие $\mathfrak{G}$ задает метрический тензор риманова пространства V_n в некоторой системе координат, и пусть G — группа движений в V_n. Дефект инвариантности многообразия $\mathfrak{G}$ относительно продолженной группы $\tilde{G}$ называется *дефектом группы движений G в пространстве V_n* и обозначается $\delta=\delta(V_n, G)$.

Учитывая инвариантность векторных полей (6.26) относительно выбора системы координат $\{x^i\}$ и используя выражения (6.27) для производной Ли и равенство (6.28), получаем следующее утверждение (Ибрагимов [7]).

Теорема. *Дефект группы движений G в пространстве V_n равен*

$$\delta(V_n, G)=\operatorname{rank}\left[\underset{\nu}{\mathfrak{L}}g_{ij}\right]. \qquad (6.30)$$

6.4. Инвариантное семейство пространств. Пусть G — группа движений в римановом пространстве V_n, а δ — соответствующий дефект. Будем предполагать, что в пространстве V_n введена оп-

ределенная система координат $\{x^i\}$, и многообразие $\mathfrak{G}$ задано уравнениями (6.1). Согласно § 6.3, минимальным инвариантным многообразием группы $\tilde{G}$, содержащим многообразие $\mathfrak{G}$, является многообразие $\tilde{G}(\mathfrak{G})$ размерности

$$\dim \tilde{G}(\mathfrak{G}) = n + \delta.$$

Рассмотрим некоторое многообразие $\mathfrak{G}^* \subset \tilde{G}(\mathfrak{G})$, заданное уравнениями

$$y_{ij} = g_{ij}^*(x) \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Многообразие $\mathfrak{G}^*$, вообще говоря, не эквивалентно $\mathfrak{G}$. Согласно § 6.1, многообразие $\mathfrak{G}^*$ определяет некоторое риманово пространство V_n^* в системе координат $\{x^i\}$. Выбирая всевозможные многообразия $\mathfrak{G}^* \subset \tilde{G}(\mathfrak{G})$, получаем семейство $G(V_n)$ n-мерных римановых пространств, зависящее от δ произвольных функций от x. Это семейство, которое по построению не зависит от выбора системы координат в пространстве V_n, представляет собой инвариантное семейство пространств для пары (V_n, G) в следующем смысле.

Определение. Пусть группе G преобразований (6.18) и каждому пространству V_n сопоставляется семейство $G(V_n)$ римановых пространств указанным выше способом. *Инвариантным семейством пространств* для пространства V_n и группы движений G в нем называется множество $\mathfrak{M}$ римановых пространств, удовлетворяющее условиям:

1) $V_n \in \mathfrak{M}$;

2) если $V_n^* \in \mathfrak{M}$, то $G(V_n^*) \subset \mathfrak{M}$;

3) $\mathfrak{M}$ является минимальным множеством n-мерных римановых пространств, обладающим свойствами 1) и 2).

Для всякой пары (V_n, G) инвариантное семейство пространств определено единственным образом и, следовательно, совпадает с семейством $G(V_n)$. Из свойства 2) следует, что $\delta(V_n^*, G) \leqslant \leqslant \delta(V_n, G)$ для всех $V_n^* \in G(V_n)$. Особый интерес представляют следующие два экстремальных случая.

I. Существует такое $V_n^* \in G(V_n)$, что $\delta(V_n^*, G) = 0$. Это означает (см. § 7.1), что группа движений G в пространстве V_n является группой изометрических движений в некотором пространстве $V_n^* \in G(V_n)$.

II. $\delta(V_n^*, G) = \delta(V_n, G)$ для любого $V_n^* \in G(V_n)$, так что $G(V_n^*) = = G(V_n)$ для всех $V_n^* \in G(V_n)$.

Инвариантами группы G назовем функции $J(g_{ij})$, удовлетворяющие условию

$$J(g_{ij}(\overline{x})) = J(\overline{g}_{ij}(\overline{x})) \tag{6.31}$$

для преобразований (6.18) группы G. Например, для групп изометрических движений имеется $\frac{1}{2}n(n+1)$ независимых инвариантов $J_{ij}=g_{ij}$ $(i, j=1, \ldots, n)$; для групп конформных движений такими инвариантами будут $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ отношений g_{ij}/g_{kl}.

Равенство (6.31) имеет простой геометрический смысл: значение функции J в точке $\bar{x}\in V_n$, полученной из точки $x\in V_n$ групповым преобразованием (6.18), совпадает со значением этой же функции в точке x. При этом значение J в точке x (правая часть равенства (6.31)) записано в системе координат $\{\bar{x}^i\}$ по соображениям, приведенным в § 6.2.

Изучение инвариантов удобно вести в терминах многообразия $\mathfrak{G}$ пространства V_n и продолженной группы $\tilde{G}$ преобразований (6.21). Рассмотрим функцию $J(y_{ij})$ и точку P на многообразии $\mathfrak{G}$, имеющую координаты x^i, $y_{ij}=g_{ij}(x)$ $(i, j=1, \ldots, n)$. При преобразовании $\tilde{T}\in\tilde{G}$ точка P перейдет в точку $\bar{P}\in\tilde{T}(\mathfrak{G})$, имеющую координаты $\bar{x}^i$, $y_{ij}=\bar{g}_{ij}(\bar{x})$. Равенство (6.31) означает, что значение функции J на проекции точки $\bar{P}$ в пространство переменных y_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ совпадает со значением этой же функции, которое она принимает на проекции точки $Q\in\mathfrak{G}$ с координатами $\bar{x}^i$, $y_{ij}=g_{ij}(\bar{x})$ $(i, j=1, \ldots, n)$, причем это верно для всех $x\in V_n$ и всех $T\in G$. Поэтому, отождествляя проекцию сечения многообразия $G(\mathfrak{G})$ гиперплоскостью $x=\text{const}$ на пространство переменных y_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ с самим этим сечением, можно определить инвариант группы движений G в римановом пространстве V_n как такую функцию $J(y_{ij})$, которая во всех точках многообразия $\tilde{G}(\mathfrak{G})$ при фиксированном $x\in V_n$ принимает одно и то же значение. Отсюда вытекает процедура отыскания инвариантов. Как было сказано выше, инвариантный класс пространств $G(V_n)$ представляет собой семейство римановых пространств, зависящее от $\delta=\delta(V_n, G)$ произвольных функций. Исключение этих произвольных функций дает $\frac{n(n+1)}{2}-\delta$ соотношений между компонентами метрического тензора. Полученные соотношения, одинаковые для всех пространств семейства $G(V_n)$, и будут искомыми инвариантами. Таких инвариантных соотношений не может быть больше, чем $\frac{n(n+1)}{2}-\delta$, так как $\tilde{G}(\mathfrak{G})$ является наименьшим инвариантным многообразием группы $\tilde{G}$, содержащим многообразие $\mathfrak{G}$. Таким образом, группа движений G в пространстве V_n имеет $\frac{n(n+1)}{2}-\delta(V_n, G)$ независимых инвариантов $J(g_{ij})$.

Проиллюстрируем процесс отыскания инвариантов на примере группы конформных движений G в пространстве V_n. Как будет

показано в § 7.2, в этом случае инвариантное семейство пространств $G(V_n)$ совпадает с семейством всех пространств V_n^*, конформных V_n, дефект $\delta(V_n, G)=1$, так что $G(V_n)$ зависит от одной произвольной функции. Пусть пространство V_n определяется многообразием $\mathfrak{G}$: $y_{ij}=g_{ij}(x)$, а пространство V_n^* конформно V_n. Тогда для пространства V_n^* можно выбрать многообразие $\mathfrak{G}^*$: $y_{ij}=g_{ij}^*(x)$ такое, что

$$g_{ij}^*(x)=\sigma(x)\,g_{ij}(x) \tag{6.32}$$

с некоторой функцией $\sigma(x)\neq 0$. Выбирая функцию σ произвольно, получаем инвариантное семейство $G(V_n)$. Полагая для простоты $g_{11}\neq 0$ и исключая σ из уравнений (6.32), приходим к равенствам

$$\frac{g_{ij}^*(x)}{g_{11}^*(x)}=\frac{g_{ij}(x)}{g_{11}(x)},$$

т. е. величины g_{ij}/g_{11} не изменяются при переходе от пространства V_n к любому конформному ему пространству V_n^*. Поэтому в данном случае имеем хорошо известные в римановой геометрии инварианты

$$J_{ij}=\frac{g_{ij}}{g_{11}} \qquad (i\leqslant j;\ i=1,\ \ldots,\ n;\ j=2,\ \ldots,\ n).$$

§ 7. Примеры движений

7.1. Изометрии. Пусть G — группа движений в римановом пространстве V_n. Она называется *группой изометрических движений* *), или *группой изометрий*, если сохраняет значение основной метрической формы: $d\bar{s}^2=ds^2$.

Согласно (6.19) и (6.20), преобразование (6.18) является изометрией в пространстве с метрическим тензором g_{ij}, если

$$g_{ij}(\bar{x})=\bar{g}_{ij}(\bar{x}). \tag{7.1}$$

Умножение обеих частей равенства (7.1) на $\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\frac{\partial f^j}{\partial x^l}$ и суммирование по i, j от 1 до n с учетом уравнений (6.2) приводят к равенствам (6.3). Наоборот, из (6.3) следует (7.1), если преобразование (6.18) обратимо. Следовательно, преобразование (6.18) является изометрией тогда и только тогда, когда выполняются (6.3).

Пусть G_1 — однопараметрическая группа изометрических движений с инфинитезимальным оператором (6.23). Дифференцированием равенств (6.3) по групповому параметру a при $a=0$

*) Killing [1], который ввел в риманову геометрию группу изометрических движений, говорил о «движении твердых тел»; употребляется также термин «движение метрики» (Дубровин, Новиков, Фоменко [1]). Иногда изометрические движения называются просто движениями (см., например, Эйзенхарт [2]), но в данной книге движение будет означать общее преобразование вида (6.21).