

показано в § 7.2, в этом случае инвариантное семейство пространств  $G(V_n)$  совпадает с семейством всех пространств  $V_n^*$ , конформных  $V_n$ , дефект  $\delta(V_n, G) = 1$ , так что  $G(V_n)$  зависит от одной произвольной функции. Пусть пространство  $V_n$  определяется многообразием  $\mathfrak{G}$ :  $y_{ij} = g_{ij}(x)$ , а пространство  $V_n^*$  конформно  $V_n$ . Тогда для пространства  $V_n^*$  можно выбрать многообразие  $\mathfrak{G}^*$ :  $y_{ij} = g_{ij}^*(x)$  такое, что

$$g_{ij}^*(x) = \sigma(x) g_{ij}(x) \quad (6.32)$$

с некоторой функцией  $\sigma(x) \neq 0$ . Выбирая функцию  $\sigma$  произвольно, получаем инвариантное семейство  $G(V_n)$ . Полагая для простоты  $g_{11} \neq 0$  и исключая  $\sigma$  из уравнений (6.32), приходим к равенствам

$$\frac{g_{ij}^*(x)}{g_{11}^*(x)} = \frac{g_{ij}(x)}{g_{11}(x)},$$

т. е. величины  $g_{ij}/g_{11}$  не изменяются при переходе от пространства  $V_n$  к любому конформному ему пространству  $V_n^*$ . Поэтому в данном случае имеем хорошо известные в римановой геометрии инварианты

$$J_{ij} = \frac{g_{ij}}{g_{11}} \quad (i \leq j; i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, n).$$

## § 7. Примеры движений

**7.1. Изометрии.** Пусть  $G$ —группа движений в римановом пространстве  $V_n$ . Она называется *группой изометрических движений* \*), или *группой изометрий*, если сохраняет значение основной метрической формы:  $d\bar{s}^2 = ds^2$ .

Согласно (6.19) и (6.20), преобразование (6.18) является изометрией в пространстве с метрическим тензором  $g_{ij}$ , если

$$g_{ij}(\bar{x}) = \bar{g}_{ij}(x). \quad (7.1)$$

Умножение обеих частей равенства (7.1) на  $\frac{\partial f^i}{\partial x^k} \frac{\partial f^j}{\partial x^l}$  и суммирование по  $i, j$  от 1 до  $n$  с учетом уравнений (6.2) приводят к равенствам (6.3). Наоборот, из (6.3) следует (7.1), если преобразование (6.18) обратимо. Следовательно, преобразование (6.18) является изометрией тогда и только тогда, когда выполняются (6.3).

Пусть  $G_1$ —однопараметрическая группа изометрических движений с инфинитезимальным оператором (6.23). Дифференцированием равенств (6.3) по групповому параметру  $a$  при  $a = 0$

\*) Killing [1], который ввел в риманову геометрию группу изометрических движений, говорил о «движении твердых тел»; употребляется также термин «движение метрики» (Дубровин, Новиков, Фоменко [1]). Иногда изометрические движения называются просто движениями (см., например, Эйзенхарт [2]), но в данной книге движение будет означать общее преобразование вида (6.21).

получаются уравнения (Killing [1])

$$\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0, \quad (7.2)$$

представляющие собой необходимое и достаточное условие изометричности группы движений  $G_1$  в пространстве с метрикой  $g_{ij}$ . Уравнения Киллинга (7.2), используя производную Ли (6.27) и тождества (6.29), можно записать в ковариантной форме:

$$\mathfrak{L}g_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (7.3)$$

**Теорема.** Для того чтобы группа движений  $G$  в римановом пространстве  $V_n$  с метрическим тензором  $g_{ij}(x)$  была группой изометрий, необходима и достаточна инвариантность многообразия  $\mathfrak{G}$ , заданного уравнениями (6.1), относительно продолженной группы  $\tilde{G}$ .

**Доказательство.** Необходимое и достаточное условие  $\tilde{X}(g_{ij}(x) - g_{ij})|_{\mathfrak{G}} = 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) инвариантности многообразия  $\mathfrak{G}$  относительно группы  $\tilde{G}$  после подстановки формулы (6.24) принимает вид уравнений Киллинга (7.2).

**7.2. Конформные движения.** Группа движений  $G_r$  в пространстве  $V_n$  называется группой конформных движений, если при всех преобразованиях группы  $G_r$  выполняется равенство  $d\bar{s}^2 = \Phi(x, a) ds^2$  с некоторой функцией  $\Phi(x, a) \neq 0$ . Согласно § 6.2 это равносильно тому, что

$$g_{ij}(\bar{x}) = \Phi(x, a) \bar{g}_{ij}(x) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

для всех преобразований группы  $G_r$ . Умножая эти равенства на  $\frac{\partial f^i}{\partial x^k} \frac{\partial f^j}{\partial x^l}$ , суммируя по  $i, j$  и используя уравнения (6.2), получаем

$$g_{ij}(f(x, a)) \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \frac{\partial f^j}{\partial x^l} = \Phi(x, a) g_{kl}(x).$$

Продифференцируем теперь полученные равенства по параметрам  $a^v$  ( $v = 1, \dots, r$ ) при  $a = 0$ . В результате, обозначив  $\Phi_v = \frac{\partial \Phi(x, a)}{\partial a^v} \Big|_{a=0}$ , получим обобщенные уравнения Киллинга

$$\mathfrak{L}_v g_{ij} = \Phi_v g_{ij} \quad (v = 1, \dots, r; i, j = 1, \dots, n) \quad (7.4)$$

относительно инфинитезимальных операторов (6.26) группы  $G_r$  конформных движений в пространстве  $V_n$ . Обобщенные уравнения Киллинга (7.4) дают в терминах инфинитезимальных операторов необходимое и достаточное условие того, что группа  $G_r$  является группой конформных движений в пространстве  $V_n$ .

Найдем дефект  $\delta(V_n, G_r)$  для группы конформных движений. Предположим, что хотя бы одна из функций  $\Phi_v(x)$  в уравнениях

(7.4) отлична от нуля (если все  $\Phi_v(x) \equiv 0$ , то группа  $G_r$  является группой изометрий — в этом случае уравнения (7.4) совпадают с уравнениями Киллинга (7.3)). Тогда по формуле (6.30) имеем

$$\delta = \text{rank} [\mathfrak{L}_{\mathbf{v}} g_{ij}] = \text{rank} [\Phi_{\mathbf{v}} g_{ij}] = 1.$$

Поэтому согласно § 6.4 инвариантное семейство пространств  $G_r(V_n)$  в этом случае будет представлять собой семейство  $n$ -мерных римановых пространств, зависящее от одной произвольной функции.

Покажем, что семейство  $G_r(V_n)$  определяется уравнениями

$$\frac{y_{ip}}{y_{11}} = \frac{g_{ip}(x)}{g_{11}(x)} \quad (i = 1, \dots, n; p = 2, \dots, n), \quad (7.5)$$

где  $g_{ij}(x)$  — метрический тензор пространства  $V_n$  (предполагается, что  $g_{11}(x) \neq 0$ ). В качестве произвольного параметра многообразия (7.5) можно будет взять  $y_{11}$ . Семейство римановых пространств, определяемое уравнениями (7.5), содержит в себе пространство  $V_n$ , так как (7.5) выполняется при  $y_{ij} = g_{ij}(x)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Поэтому для доказательства того, что  $G_r(V_n)$  задается уравнениями (7.5), достаточно показать, что (7.5) определяет инвариантное многообразие группы  $\tilde{G}_r$ .

Пусть  $G_1$  — некоторая однопараметрическая подгруппа группы  $G_r$ ,  $\tilde{X}$  — инфинитезимальный оператор (6.24) группы  $\tilde{G}_1$ ; функции  $\xi^i(x)$  удовлетворяют обобщенным уравнениям Киллинга (7.4). Запишем уравнения (7.5):

$$F_{ip} \equiv \frac{g_{ip}(x)}{g_{11}(x)} y_{11} - y_{ip} = 0 \quad (i = 1, \dots, n; p = 2, \dots, n).$$

Условия инвариантности многообразия, заданного этими уравнениями, относительно группы  $\tilde{G}_1$  имеют вид

$$\tilde{X} F_{ip} |_{(7.5)} = 0.$$

Рассмотрим сначала эти условия для  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X} F_{1p} |_{(7.5)} &= \left( y_{1k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} + y_{pk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^1} - 2 \frac{g_{1p}(x)}{g_{11}(x)} y_{1k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^1} \right) |_{(7.5)} + \\ &\quad + \frac{y_{11}}{g_{11}(x)} \left( \xi^k \frac{\partial g_{1p}(x)}{\partial x^k} - \frac{g_{1p}(x)}{g_{11}(x)} \xi^k \frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^k} \right). \end{aligned}$$

Выражение, стоящее справа в первых скобках, в силу (7.5) равно

$$\frac{y_{11}}{g_{11}} \left( g_{1k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} + g_{pk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^1} - 2 \frac{g_{1p}}{g_{11}} g_{1k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^1} \right).$$

Поэтому тождества (6.29) и уравнения (7.4) дают

$$\begin{aligned} \tilde{X} F_{1p} |_{(7.5)} &= \frac{y_{11}}{g_{11}^2} (g_{11} (\xi_{1,p} + \xi_{p,1}) - 2 g_{1p} \xi_{1,1}) = \\ &= \frac{y_{11}}{g_{11}^2} (g_{11} \cdot \Phi g_{1p} - g_{1p} \cdot \Phi g_{11}) = 0. \end{aligned}$$

Для  $i \geq 2$  аналогичным путем получаются равенства

$$\begin{aligned} \tilde{X}F_{ip} |_{(7.5)} &= \left( y_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} + y_{pk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} - 2 \frac{g_{ip}}{g_{11}} y_{1k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^1} \right)_{(7.5)} + \\ &+ \frac{y_{11}}{g_{11}} \left( \xi^k \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^k} - \frac{g_{ip}}{g_{11}} \xi^k \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} \right) = \frac{y_{11}}{g_{11}^2} (g_{11} (\xi_{i,p} + \xi_{p,i}) - 2 g_{ip} \xi_{1,1}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{X}F_{ip} |_{(7.5)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n; p = 2, \dots, n).$$

Это означает, что уравнения (7.5) задают инвариантное многообразие группы  $\tilde{G}_1$ . Поскольку это верно для любой однопараметрической подгруппы группы  $G_r$ , то (7.5) определяет инвариантное многообразие  $\tilde{G}_r(\mathfrak{G})$  группы  $\tilde{G}_r$ .

Пусть  $V_n^*$  — некоторое пространство семейства  $G_r(V_n)$ , определенного уравнениями (7.5). Если уравнения, задающие многообразие  $\mathfrak{G}^*$  пространства  $V_n^*$ , записать в виде  $y_{ij} = g_{ij}^*(x)$  и ввести обозначения  $\sigma(x) = \frac{g_{11}^*(x)}{g_{11}(x)}$ , то из уравнений (7.5) следуют равенства

$$g_{ij}^*(x) = \sigma(x) g_{ij}(x) \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (7.6)$$

Следовательно, пространство  $V_n^*$  конформно  $V_n$ . Наоборот, если некоторое риманово пространство  $V_n^*$  конформно  $V_n$  и имеет метрический тензор  $g_{ij}^*(x)$  вида (7.6), то многообразие  $y_{ij} = g_{ij}^*(x)$  содержится в многообразии, заданном уравнениями (7.5). Однопараметрическому произволу в (7.5) соответствует произвольная функция  $\sigma(x)$  в равенствах (7.6), так что уравнения (7.5) задают семейство всех пространств, конформных  $V_n$ . Этим доказано следующее утверждение.

**Теорема.** Группа конформных движений  $G_r$  в римановом пространстве  $V_n$  имеет дефект  $\delta = 1$ , а соответствующее инвариантное семейство пространств  $G_r(V_n)$  совпадает с множеством всех римановых пространств, конформных  $V_n$ .

**7.3. Движения с  $\delta = 2$ .** Предположим, что координаты  $\xi_v^i(x)$  операторов (6.26) группы движений  $G_r$  ( $r \geq 2$ ) в пространстве  $V_n$  ( $n > 2$ ) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \xi_{vk, l} + \xi_{vl, k} &= \Phi_v g_{kl} \quad (k, l = 1, \dots, n-1), \\ \xi_{vi, n} + \xi_{vn, i} &= \Psi_v g_{in} \quad (i = 1, \dots, n), \\ (v &= 1, \dots, r). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Если  $\Phi_v(x) = \Psi_v(x)$  ( $v = 1, \dots, r$ ), то уравнения (7.7) совпадают с обобщенными уравнениями Киллинга (7.4) для групп конформных движений. Пусть  $\Phi_v \neq \Psi_v$  хотя бы для одного значения  $v$ , а векторы  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_r)$  и  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_r)$  линейно независимы. Нетрудно подсчитать, что в этих предположениях  $\text{rank} [\mathfrak{L} g_{ij}] = 2$ , так что  $\delta(V_n, G_r) = 2$ .

Покажем теперь, что действительно существуют группы, обладающие указанными свойствами. Возьмем для этого плоское  $n$ -мерное пространство  $S_n$  с метрическим тензором  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Уравнения (7.7) имеют вид

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} = \Phi \delta_{kl} \quad (k, l = 1, \dots, n-1), \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial \xi^n}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial \xi^n}{\partial x^n} = \frac{1}{2} \Psi. \quad (7.10)$$

В этом параграфе индексы  $k, l$  принимают значения  $1, \dots, n-1$ ; в частности, если по этим индексам ведется суммирование, то оно также распространяется на значения от 1 до  $n-1$ .

Уравнения (7.8) относительно  $\xi^1, \dots, \xi^{n-1}$ , рассматриваемых как функции переменных  $x^1, \dots, x^{n-1}$ , имеют вид обобщенных уравнений Киллинга (7.4) в плоском  $(n-1)$ -мерном пространстве (см. § 8.3); при этом переменная  $x^n$ , от которой также зависят функции  $\xi^k$ , играет роль параметра. Поэтому общее решение уравнений (7.8) дается известной формулой

$$\xi^k = A_l(x^n)(2x^k x^l - \rho^2 \delta^{kl}) + a_l^k(x^n) x^l + b(x^n) x^k + c^k(x^n) \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad (7.11)$$

где

$$\rho^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2, \quad a_l^k = -a_k^l,$$

а  $A_l, a_l^k (k < l), c^k (k, l = 1, \dots, n-1)$  и  $b$  — произвольные функции от  $x^n$ .

Уравнения (7.9) при известных функциях  $\xi^k$  определяют функцию  $\xi^n$ . Условия совместности этих уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x^n} \left( \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} - \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} \right) = 0$$

после подстановки из формул (7.11) значений

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} - \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} = 4(A_l x^k - A_k x^l) + 2a_l^k$$

принимают вид

$$2(\dot{A}_l x^k - \dot{A}_k x^l) + \dot{a}_l^k = 0,$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по  $x^n$ . Отсюда

$$\dot{A}_k = 0, \quad \dot{a}_l^k = 0,$$

так что все величины  $A_k$  и  $a_l^k (k, l = 1, \dots, n-1)$  в формуле (7.11) являются постоянными. Теперь уравнения (7.9) легко

решаются и дают

$$\xi^n = -\frac{1}{2} \dot{b}(x^n) \rho^2 - \sum_{k=1}^{n-1} c^k(x^n) x^k + f(x^n),$$

где  $f(x^n)$  — произвольная функция. Таким образом, общее решение уравнений (7.8), (7.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^k &= A_l(2x^k x^l - \rho^2 \delta^{kl}) + a_l^k x^l + b(x^n) x^k + c^k(x^n), \\ \xi^n &= -\frac{1}{2} \dot{b}(x^n) \rho^2 - \sum_{k=1}^{n-1} c^k(x^n) x^k + f(x^n). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Функция  $\Phi(x)$  находится из уравнений (7.8), а  $\Psi(x)$  — из (7.10). Этим решение системы (7.8) — (7.10) заканчивается.

Уравнения (7.4) представляют собой условие инвариантности многообразия, заданного уравнениями (7.5), поэтому множество всех решений уравнений (7.4) образует алгебру Ли относительно умножения (коммутации) операторов  $X$ . В отличие от этого векторные поля (7.12) не образуют алгебру Ли.

Выделим из решений (7.12) некоторое множество решений, образующее алгебру Ли. Положим

$$a_l^k = 0, \quad c^k = 0 \quad (k, l = 1, \dots, n-1), \quad b = 0,$$

а постоянные  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) и функцию  $f(x^n)$  оставим произвольными. Операторы

$$X_f = f(x^n) \frac{\partial}{\partial x^n}$$

определяют бесконечную группу преобразований на вещественной прямой. Максимальный порядок конечной подгруппы этой бесконечной группы равен 3; в качестве базисных операторов подгруппы можно взять операторы, соответствующие функциям  $f = 1$ ,  $f = x^n$ ,  $f = (x^n)^2$ . Взяв произвольные  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) и указанные значения функции  $f$ , получим следующую  $(n+2)$ -параметрическую группу  $G_{n+2}$  с базисными операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad X_2 = x^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad X_3 = (x^n)^2 \frac{\partial}{\partial x^n}, \\ Y_k &= (2x^k x^l - \rho^2 \delta^{kl}) \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (k = 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Для них имеем

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3, \\ [X_\alpha, Y_k] = 0, \quad [Y_k, Y_l] = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3; k, l = 1, \dots, n-1)$$

Подставив (7.13) в формулу (6.30), получим

$$\delta(S_n, G_{n+2}) = 2,$$

т. е. группа  $G_{n+2}$  с базисными инфинитезимальными операторами (7.13) представляет собой группу движений с дефектом  $\delta=2$  в пространстве  $S_n$ .

Вопрос о соответствующем инвариантном семействе пространств и инвариантах полученной группы пока не рассматривается. Это будет сделано в § 7.5.

**7.4. Неконформные движения с  $\delta=1$ .** Согласно теореме 7.1 группа изометрических движений в любом римановом пространстве  $V_n$  характеризуется тем, что ее дефект  $\delta=0$ . Группа конформных движений имеет дефект  $\delta=1$ , но это равенство не является достаточным условием того, что рассматриваемая группа является группой конформных движений. Ниже приводится пример бесконечной группы неконформных движений с дефектом  $\delta=1$  в плоском  $n$ -мерном пространстве.

Рассмотрим частный случай уравнений (7.8)–(7.10), полагая в них  $\Phi=0$ . Из формул (7.11) получаем

$$\Phi = 4A_k(x^n)x^k + 2b(x^n),$$

и условие  $\Phi=0$  дает  $A_k=0$  ( $k=1, \dots, n-1$ ),  $b=0$ . Подстановка этих значений  $A_k$ ,  $b$  в (7.12) дает общее решение уравнений (7.8), (7.9) при  $\Phi=0$ :

$$\begin{aligned} \xi^k &= a_l^k x^l + c^k(x^n) \quad (k=1, \dots, n-1), \\ \xi^n &= -\sum_{k=1}^{n-1} c^k(x^n) x^k + f(x^n), \end{aligned} \tag{7.14}$$

где  $a_l^k$ ,  $c^k(x^n)$  и  $f(x^n)$  имеют тот же смысл, что и в формулах (7.12).

Из множества всех векторных полей (7.14), которые при произвольных  $a_l^k$ ,  $c^k(x^n)$ ,  $f(x^n)$  не образуют алгебру Ли, можно выделить следующие алгебры Ли (ниже выписаны только базисные операторы и размерности этих алгебр):

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{x^n} \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 e^{x^n} \frac{\partial}{\partial x^n}, \\ X_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i=2, \dots, n), \end{aligned} \tag{7.15}$$

$$X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (i < j; i, j=2, \dots, n-1),$$

$$r = n + \frac{1}{2}(n-2)(n-3);$$

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (k=1, \dots, n-1),$$

$$X_{kl} = x^l \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (k < l; k, l=1, \dots, n-1), \tag{7.16}$$

$$X_f = f(x^n) \frac{\partial}{\partial x^n},$$

$$r = \infty,$$

здесь  $f(x^n)$  — произвольная функция;

$$\begin{aligned} X_1 &= h(x^n) \frac{\partial}{\partial x^1} - h(x^n) x^1 \frac{\partial}{\partial x^n}, \\ X_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i = 2, \dots, n-1), \\ X_{kl} &= x^l \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (k < l; k, l = 1, \dots, n-1), \\ r &= (n-1) + \frac{1}{2}(n-2)(n-3), \end{aligned} \tag{7.17}$$

здесь  $h(x^n)$  — фиксированная функция (в зависимости от выбора  $h$  получаются разные алгебры).

Кроме того, имеются алгебры Ли с базисными операторами, получающимися из (7.15) и (7.17) заменой переменной  $x^1$  на любую из переменных  $x^2, \dots, x^{n-1}$ , а также алгебра Ли группы изометрий в пространстве  $S_n$  при  $\Psi = 0$ .

Для всех групп, соответствующих выписанным алгебрам, дефект  $\delta = 1$ . Среди этих групп есть и бесконечная группа, соответствующая бесконечномерной алгебре Ли с базисными операторами (7.16). Нетрудно проверить, что уравнения

$$y_{ik} = \delta_{ik} \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n-1),$$

определяют минимальное инвариантное многообразие продолжения  $\tilde{G}$  группы  $G$  с операторами (7.16). Согласно § 6.4 инвариантное семейство пространств  $G(S_n)$  задается уравнениями

$$\begin{aligned} g_{ik} &= \delta_{ik} \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n-1), \\ g_{nn} &= \sigma(x), \end{aligned}$$

где  $\sigma(x)$  — произвольная функция от  $x = (x^1, \dots, x^n)$ . Инвариантами группы  $G$  преобразований в пространстве  $S_n$  будут компоненты  $g_{ik}$  ( $i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n-1$ ) метрического тензора. Нетрудно понять и геометрический смысл этих инвариантов, так как любой инфинитезимальный  $n$ -мерный шар радиуса  $\varepsilon$ :

$$(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 \leq \varepsilon^2,$$

при преобразованиях группы  $G$  переходит в эллипсоид с полуосями  $= \varepsilon$  в направлениях осей  $x^1, \dots, x^{n-1}$  и полуосью произвольной длины в направлении  $x^n$ .

**7.5. Движения с заданными инвариантами.** Следующий пример иллюстрирует способ отыскания группы движений по заданным инвариантам. Рассматривается плоское пространство  $S_n$  с метрическим тензором  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , и ищется группа движений  $\tilde{G}$  с дефектом  $\delta = 2$ , имеющая следующие инварианты:

$$\begin{aligned} g_{ki} &\quad (k \neq i; k = 1, \dots, n-1; i = 1, \dots, n), \\ \underline{g_{kk}} &\quad (k = 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Согласно § 6.4 инвариантное семейство пространств  $G(S_n)$  определяется уравнениями

$$\begin{aligned} y_{ki} &= 0 \quad (k \neq i; k = 1, \dots, n-1; i = 1, \dots, n), \\ y_{kk} &= y_{11} \quad (k = 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Группа  $G$ , имеющая указанные инварианты, находится из условия инвариантности многообразия (7.18) относительно продолженной группы  $\tilde{G}$ :

$$\tilde{X}y_{ki} = - \left( y_{11} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + y_{ii} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \right) = 0 \quad (k \neq i) \quad (7.19)$$

(по индексу  $i$  суммирования нет),

$$\tilde{X}(y_{11} - y_{kk}) = 2y_{11} \left( \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) = 0 \quad (k = 2, \dots, n-1) \quad (7.20)$$

(здесь также нет суммирования по  $k$ ). Учитывая, что в (7.18) величины  $y_{11}$  и  $y_{nn}$  являются свободными переменными, (7.19), (7.20) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} = 0 \quad (k \neq l; k, l = 1, \dots, n-1), \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} = 0, \quad \frac{\partial \xi^n}{\partial x^k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad (7.22)$$

$$2 \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} = \Phi \quad (k = 1, \dots, n-1). \quad (7.23)$$

Общее решение уравнений (7.21)–(7.23) образует алгебру Ли, поскольку эти уравнения представляют собой необходимое и достаточное условие инвариантности некоторого многообразия. Так как система (7.21), (7.23) совпадает с (7.8), то общее решение уравнений (7.21), (7.22) дается формулами (7.11). Подстановка (7.11) в (7.22) дает, что все величины

$$A_k, \quad a_l^k, \quad c^k, \quad b \quad (k, l = 1, \dots, n-1)$$

постоянны, а  $\xi^n = \xi^n(x^n)$ . Таким образом, система дифференциальных уравнений (7.21)–(7.23) имеет общее решение

$$\begin{aligned} \xi^k &= A_l (2x^k x^l - \rho^2 \delta^{kl}) + a_l^k x^l + b x^k + c^k, \\ \xi^n &= f(x^n), \end{aligned} \quad (7.24)$$

зависящее от  $\frac{1}{2}n(n+1)$  произвольных постоянных  $A_k, a_l^k$  ( $k < l$ ),  $c^k$  ( $k, l = 1, \dots, n-1$ ),  $b$  и одной произвольной функции  $f(x^n)$ . Следовательно, искомая группа  $G$  является бесконечной и имеет

базисные операторы

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad X_{kl} = x^l \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^l}, \\ Y_k &= (2x^k x^l - \rho^2 \delta^{kl}) \frac{\partial}{\partial x^l}, \\ Z &= x^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad X_f = f(x^n) \frac{\partial}{\partial x^n} \\ (k, l) &= 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Алгебра Ли с базисом (7.25) содержит в качестве своих подалгебр конечномерную алгебру с базисом (7.13) и бесконечномерную алгебру с базисом (7.16). При этом группы  $G_{n+2}$  и  $G$  с инфинитезимальными операторами (7.13) и (7.25) соответственно имеют одинаковый дефект  $\delta = 2$  и, следовательно, одни и те же инварианты. Действительно, все инварианты группы движений  $G$  в пространстве  $V_n$  являются инвариантами любой ее подгруппы  $G'$ , а если  $\delta(V_n, G) = \delta(V_n, G')$ , то  $G$  и  $G'$  имеют одни и те же инварианты.

В связи с рассмотрением групп движений возникает задача классификации римановых пространств по группам движений в них. Такая задача в случае групп изометрических и конформных движений уже давно рассматривается в римановой геометрии (Killing [1], Fubini [1]; подробное изложение этих вопросов и полную библиографию читатель найдет с следующих книгах: Эйзенхарт [2], Yano [1], Lichnerowicz [2]); основой исследования этих групп являются уравнения Киллинга (7.3) и обобщенные уравнения Киллинга (7.4). В случае произвольных групп движений аналогом уравнений Киллинга может служить равенство (6.30). Однако, как было выяснено в § 7.2, обобщенные уравнения Киллинга (как и уравнения Киллинга для групп изометрий) определяют не только значение дефекта  $\delta$ , но и соответствующее инвариантное семейство пространств. В отличие от этого, равенство (3.30) определяет только величину дефекта, поэтому при переходе к общей задаче классификации римановых пространств по группам движений появляется произвол, связанный с выбором инвариантного семейства пространств.

## § 8. Римановы пространства с нетривиальной конформной группой

**8.1. Конформные пространства.** Если метрические тензоры  $g_{ij}$  и  $\tilde{g}_{ij}$  римановых пространств  $V_n$  и  $\tilde{V}_n$  связаны соотношением вида (7.6) в некоторой системе координат  $\{x^i\}$ , то пространства  $V_n$  и  $\tilde{V}_n$  называются *конформными*. Будем считать функцию  $\sigma(x)$  в равенствах (7.6) положительной и записывать конформное соответствие между пространствами  $V_n$  и  $\tilde{V}_n$  в виде

$$\tilde{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x). \tag{8.1}$$