базисные операторы

$$
\begin{gathered}
X_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad X_{kl} = x^l \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^l}, \\
Y_k = (2x^k x^l - \rho^2 \delta^{kl}) \frac{\partial}{\partial x^l}, \\
Z = x^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad X_f = f(x^n) \frac{\partial}{\partial x^n} \\
(k,\ l = 1,\ \ldots,\ n-1).
\end{gathered} \tag{7.25}
$$

Алгебра Ли с базисом (7.25) содержит в качестве своих подалгебр конечномерную алгебру с базисом (7.13) и бесконечномерную алгебру с базисом (7.16). При этом группы G_{n+2} и G с инфинитезимальными операторами (7.13) и (7.25) соответственно имеют одинаковый дефект $\delta = 2$ и, следовательно, одни и те же инварианты. Действительно, все инварианты группы движений G в пространстве V_n являются инвариантами любой ее подгруппы G', а если $\delta(V_n, G) = \delta(V_n, G')$, то G и G' имеют одни и те же инварианты.

В связи с рассмотрением групп движений возникает задача классификации римановых пространств по группам движений в них. Такая задача в случае групп изометрических и конформных движений уже давно рассматривается в римановой геометрии (Killing [1], Fubini [1]; подробное изложение этих вопросов и полную библиографию читатель найдет с следующих книгах: Эйзенхарт [2], Yano [1], Lichnerowicz [2]); основой исследования этих групп являются уравнения Киллинга (7.3) и обобщенные уравнения Киллинга (7.4). В случае произвольных групп движений аналогом уравнений Киллинга может служить равенство (6.30). Однако, как было выяснено в § 7.2, обобщенные уравнения Киллинга (как и уравнения Киллинга для групп изометрий) определяют не только значение дефекта δ, но и соответствующее инвариантное семейство пространств. В отличие от этого, равенство (3.30) определяет только величину дефекта, поэтому при переходе к общей задаче классификации римановых пространств по группам движений появляется произвол, связанный с выбором инвариантного семейства пространств.

§ 8. Римановы пространства с нетривиальной конформной группой

8.1. Конформные пространства. Если метрические тензоры g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ римановых пространств V_n и $\tilde{V}_n$ связаны соотношением вида (7.6) в некоторой системе координат $\{x^i\}$, то пространства V_n и $\tilde{V}_n$ называются *конформными*. Будем считать функцию $\sigma(x)$ в равенствах (7.6) положительной и записывать конформное соответствие между пространствами V_n и $\tilde{V}_n$ в виде

$$\tilde{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x). \tag{8.1}$$

В дальнейшем будут использоваться следующие формулы, связывающие соответствующие величины в пространствах V_n и $\tilde{V}_n$ (Эйзенхарт [2], § 28):

$$\begin{aligned} &g^{ij}=e^{2\sigma}\tilde{g}^{ij};\\ &\Gamma^k_{ij}=\tilde{\Gamma}^k_{ij}-\delta^k_i\sigma_{,j}-\delta^k_j\sigma_{,i}+\tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{kl}\sigma_{,l};\\ &R=e^{2\sigma}\left(\tilde{R}-2(n-1)\tilde{\Delta}_2\sigma+(n-1)(n-2)\tilde{\Delta}_1\sigma\right);\\ &C^l_{ijk}=\tilde{C}^l_{ijk}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Группа конформных движений G в V_n является группой конформных движений в каждом пространстве $\tilde{V}_n$, конформном V_n. Действительно, если однопараметрическая группа G_1 с инфинитезимальным оператором (6.23) удовлетворяет обобщенным уравнениям Киллинга

$$\mathfrak{L}g_{ij}=\Phi g_{ij} \tag{8.3}$$

в пространстве V_n, то из формулы (8.1) следует, что

$$\mathfrak{L}\tilde{g}_{ij}=\tilde{\Phi}\tilde{g}_{ij},$$

где

$$\tilde{\Phi}=\Phi+2\xi^i\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}. \tag{8.4}$$

Согласно теореме 7.2 дефект группы конформных движений G_r в пространстве V_n равен 1, поэтому выполняется либо условие I, либо условие II из § 6.4. Соответственно этому группа G_r называется либо тривиальной, либо нетривиальной группой конформных движений. Ниже группой конформных движений в V_n называется максимальная группа, соответствующая общему решению обобщенных уравнений Киллинга (7.4).

Определение. Группа конформных движений G_r в пространстве V_n называется *нетривиальной*, если $\delta(\tilde{V}_n, G_r)=1$ для каждого пространства $\tilde{V}_n$, конформного V_n; риманово пространство V_n при этом называется *пространством с нетривиальной конформной группой*. Если существует такое пространство $\tilde{V}_n$, конформное V_n, что $\delta(\tilde{V}_n, G_r)=0$, то V_n называется *пространством с тривиальной конформной группой*, а G_r — *тривиальной группой конформных движений* в этом пространстве.

Согласно этому определению для пространства V_n с тривиальной конформной группой найдется такое конформное пространство $\tilde{V}_n$, в котором группа конформных движений является группой изометрий. Рассмотрим один пример. Пусть V_4 — пространство с метрической формой

$$ds^2=-(1+t)\,dx^2-dy^2-dz^2+dt^2, \qquad t\geqslant 0. \tag{8.5}$$

Обозначив

$$x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z,\quad x^4=t,$$

запишем обобщенные уравнения Киллинга (8.3) в виде следующих двух систем уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi^2}{\partial x^3}+\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2}=\frac{\partial\xi^2}{\partial x^4}-\frac{\partial\xi^4}{\partial x^2}=\frac{\partial\xi^3}{\partial x^4}-\frac{\partial\xi^4}{\partial x^3}=0,\\ \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}=\frac{\partial\xi^3}{\partial x^3}=\frac{\partial\xi^4}{\partial x^4}=\frac{1}{2}\Phi;\end{gathered}\tag{8.6}$$

$$\begin{gathered}(1+t)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^2}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x^1}=(1+t)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^3}+\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1}=(1+t)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^4}-\frac{\partial\xi^4}{\partial x^1}=0,\\ \frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}=\frac{1}{2}\Phi-\frac{1}{2(1+t)}\xi^4.\end{gathered}\tag{8.7}$$

Система (8.6) при фиксированном значении x^1 имеет вид обобщенных уравнений Киллинга в плоском 3-мерном пространстве переменных (x^2, x^3, x^4), и поэтому

$$\begin{aligned}\xi^2&=a_1[(x^2)^2-(x^3)^2+(x^4)^2]+2a_2x^2x^3+2a_3x^2x^4+bx^2+c_1x^3+c_2x^4+d_1,\\ \xi^3&=2a_1x^2x^3+a_2[(x^3)^2-(x^2)^2+(x^4)^2]+2a_3x^3x^4+bx^3-c_1x^2+c_3x^4+d_2,\\ \xi^4&=2a_1x^2x^4+2a_2x^3x^4+a_3[(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2]+bx^4+c_2x^2+c_3x^3+d_3,\end{aligned}\tag{8.8}$$

где a_i, c_i, d_i $(i=1, 2, 3)$ и b — произвольные функции от x^1. Эти функции подлежат определению из уравнения (8.7). Подставляя выражения (8.8) в систему (8.7) и исследуя условия совместности полученных уравнений относительно функции ξ^1, получаем

$$\begin{gathered}a_i=0\quad(i=1,\ 2,\ 3),\qquad c_2=c_3=0,\quad c_1=\text{const},\\ d_i=\text{const}\quad(i=1,\ 2,\ 3),\qquad b=d_3.\end{gathered}$$

Подстановка этих соотношений в формулы (8.8) дает общее решение уравнений (8.6)—(8.7):

$$\begin{gathered}\xi^1=\frac{1}{2}bx^1+k_1,\qquad \xi^2=bx^2+cx^3+k_2,\\ \xi^3=bx^3-cx^2+k_3,\quad \xi^4=b(1+x^4),\end{gathered}$$

зависящее от пяти произвольных постоянных b, c, k_i $(i=1, 2, 3)$.

Таким образом, пространство V_4 имеет 5-параметрическую группу G_5 конформных движений. В качестве базисных операторов этой группы можно взять

$$\begin{gathered}X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial z},\quad X_4=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},\\ X_5=\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+(1+t)\frac{\partial}{\partial t}.\end{gathered}\tag{8.9}$$

Группой изометрических движений в V_4 является 4-параметрическая группа с инфинитезимальными операторами X_1, X_2, X_3, X_4. Убедимся теперь, что V_4 является пространством с тривиальной конформной группой. Найдем для этого пространство $\tilde{V}_4$,

конформное V_4, в котором группа G_5 с базисными инфинитезимальными операторами (8.9) является группой изометрий.

Заметим сначала, что в соответствии с формулой (8.4) V_n представляет собой пространство с тривиальной конформной группой тогда и только тогда, когда уравнения

$$2\xi_\nu^i(x)\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}+\Phi_\nu(x)=0 \qquad (\nu=1,\ \ldots,\ r) \tag{8.10}$$

совместны для всех операторов $X_\nu=\xi_\nu^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(\nu=1,\ \ldots,\ r)$ группы G_r конформных движений в V_n. В том случае, когда уравнения (8.10) совместны, G_r является группой изометрических движений в пространстве V_n с метрическим тензором (8.1), где $\sigma(x)$ — решение системы (8.10).

В нашем случае уравнение (8.10), записанное для операторов X_1, X_2, X_3 из (8.9), приводит к условию $\sigma=\sigma(t)$. При этом для оператора X_4 (8.10) выполняется тождественно, а для оператора X_5 дает

$$(1+t)\frac{d\sigma}{dt}+1=0.$$

Опуская несущественное здесь постоянное слагаемое, решение полученного уравнения запишем в виде

$$\sigma=\ln(1+t)^{-1}.$$

Таким образом, группа G_5 с базисными инфинитезимальными операторами (8.9) является группой изометрических движений в пространстве $\tilde{V}_4$ с метрической формой

$$d\tilde{s}^2=(1+t)^{-2}(-(1+t)\,dx^2-dy^2-dz^2+dt^2).$$

Пространства V_n с нетривиальной конформной группой характеризуются тем, что группу конформных движений в V_n нельзя превратить в группу изометрий переходом к конформному пространству. Легко видеть, что плоское пространство или любое конформно-плоское пространство представляет собой пространство с нетривиальной конформной группой. Действительно, в каждом конформно-плоском пространстве V_n порядок группы конформных движений достигает максимально возможного значения $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, тогда как порядок группы изометрических движений в любом n-мерном римановом пространстве не превосходит $\frac{1}{2}n(n+1)$.

8.2. Пространства постоянной кривизны. Риманово пространство V_n постоянной кривизны характеризуется условием

$$R_{ijkl}=K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}), \tag{8.11}$$

где $R_{ijkl}=g_{im}R^m_{jkl}$ — тензор Римана — Кристоффеля, $K=\text{const}$ — риманова кривизна пространства V_n. В любом пространстве постоянной кривизны можно выбрать систему координат $\{x^i\}$ так, чтобы метрическая форма (6.4) имела вид (Эйзенхарт [2], § 27)

$$ds^2=(A_1+\ldots+A_n)^{-2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(dx^i)^2, \tag{8.12}$$

где каждое ε_i равно $+1$ или -1 в соответствии с сигнатурой пространства V_n, а

$$A_i=\varepsilon_i(a(x^i)^2+2b_ix^i+c_i)$$

(по i нет суммирования) с постоянными a, b_i, c_i, удовлетворяющими условию

$$4\sum_i\varepsilon_i(ac_i-b_i^2)=K. \tag{8.13}$$

Каноническая риманова форма

$$ds^2=\frac{1}{\theta^2}\sum_i\varepsilon_i(dx^i)^2,\quad \theta=1+\frac{K}{4}\sum_i\varepsilon_i(x^i)^2, \tag{8.14}$$

получается из (8.2) при $b_i=0$, $\sum_i\varepsilon_ic_i=1$. Другой удобный вид метрической формы пространства постоянной кривизны получается из (8.2), когда $\varepsilon_iK<0$ для некоторого $i=i_0$. Если в этом случае взять $a=0$, $b_i=0$ для $i\neq i_0$ и в соответствии с (8.3) $b_{i_0}=\frac{1}{2}\sqrt{|K|}$, то формула (8.2) примет вид

$$ds^2=\frac{1}{|K|(x^{i_0})^2}\sum_i\varepsilon_i(dx^i)^2. \tag{8.15}$$

Рассмотрим теперь для произвольного риманова пространства V_n уравнения Киллинга (7.3), которые представляют собой переопределенную систему дифференциальных уравнений первого порядка: $\frac{1}{2}n(n+1)$ уравнений относительно n функций ξ^i $(i=1,\ldots,n)$. Из условий совместности этой системы следует, что ее общее решение зависит от $r\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)$ произвольных постоянных, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда выполняется (8.11). Это свойство групп изометрических движений в римановых пространствах выражается следующей теоремой (Эйзенхарт [2], § 71).

Теорема. *Порядок группы изометрических движений в V_n не превосходит $\frac{1}{2}n(n+1)$, и это максимальное значение достигается только для пространств постоянной кривизны.*

Группы изометрических движений в пространствах постоянной кривизны были исследованы еще Киллингом (Killing [1],

§§ 11, 12). Уравнения Киллинга (7.3) для пространства V_n постоянной кривизны легко решаются в системе координат, приводящей метрическую форму пространства V_n к виду (8.14). Найдя общее решение уравнений Киллинга, получим базис алгебры Ли группы изометрических движений в пространстве V_n постоянной кривизны K:

$$X_i = \left(\frac{K}{2} x^i x^j + (2-\theta)\,\varepsilon_i \delta^{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^j},$$
$$X_{ij} = \varepsilon_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - \varepsilon_i x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n); \tag{8.16}$$

здесь в выражениях $\varepsilon_i x^i$, $\varepsilon_j x^j$, $\varepsilon_i \delta^{ij}$ индексы i, j фиксированы и по ним не производится суммирование; δ^{ij} — символ Кронекера.

Из формулы (8.12) видно, что пространство постоянной кривизны конформно плоскому пространству и, следовательно, принадлежит классу римановых пространств, имеющих группу конформных движений максимального порядка $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

8.3. Конформно-плоские пространства. Обобщенные уравнения Киллинга (8.3) при $n \geqslant 3$ представляют собой переопределенную систему уравнений относительно функций Φ, ξ^i $(i = 1,\ \ldots,\ n)$. Дифференциальные следствия этих уравнений позволяют выразить производные второго и более высокого порядков функций Φ и ξ^i через величины Φ, $\Phi_{,k}$, ξ^i, $\xi^i_{,k}$. Эти $(n+1)^2$ величин, в свою очередь, связаны $\frac{1}{2}n(n+1)$ соотношениями (8.3) и, кроме того, некоторыми условиями совместности, так что группа конформных движений в пространстве V_n содержит не более $(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ произвольных параметров. Условия совместности обобщенных уравнений Киллинга удобно записать с помощью тензора конформной кривизны Вейля C^l_{ijk}, определенного формулой (6.14), и тензора

$$R_{ijk} = \frac{2}{n-2}(L_{ik,\,j} - L_{ij,\,k}), \tag{8.17}$$

где

$$L_{ik} = -R_{ik} + \frac{R}{2(n-1)} g_{ik}. \tag{8.18}$$

Полная система условий совместности уравнений (8.3) представляет собой цепочку уравнений для производных Ли от тензоров C^l_{ijk}, R_{ijk} и от их ковариантных производных (Taub [1]; Yano [1], стр. 161). Два первых уравнения этой цепочки имеют вид

$$\mathfrak{L} C^l_{ijk} = 0, \tag{8.19}$$

$$\mathfrak{L} R_{ijk} = \frac{1}{2} C^l_{ijk} \Phi_{,\,l}, \tag{8.20}$$

где производные Ли вычисляются по следующим формулам:

$$\mathfrak{L}C^l_{ijk}=\xi^m C^l_{ijk,\,m}-C^m_{ijk}\xi^l_{,\,m}+C^l_{mjk}\xi^m_{,\,i}+C^l_{imk}\xi^m_{,\,j}+C^i_{ijm}\xi^m_{,\,k};$$
$$\mathfrak{L}R_{ijk}=\xi^m R_{ijk,\,m}+R_{mjk}\xi^m_{,\,i}+R_{imk}\xi^m_{,\,j}+R_{ijm}\xi^m_{,\,k}.$$

Для того чтобы группа конформных движений в V_n содержала максимально возможное число $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ произвольных параметров, все условия совместности должны выполняться тождественно по переменным Φ, $\Phi_{,\,k}$, ξ^i, $\xi^i_{,\,k}$, связанным только уравнениями (8.3). Уравнения (8.19), (8.20) при этом условии дают

$$C^l_{ijk}=0, \tag{8.21}$$
$$R_{ijk}=0. \tag{8.22}$$

Если $n=3$, то равенство (8.21) выполняется для любого V_3, а (8.22) представляет собой критерий того, что V_3 конформно плоскому пространству. При $n>3$, наоборот, уравнение (8.21) выполняется тогда и только тогда, когда V_n конформно плоскому пространству, а (8.22) является следствием равенства (8.21) (см. Эйзенхарт [2], § 28). Таким образом, справедливо следующее утверждение (Taub [1]).

Теорема. *Группа конформных движений G_r в пространстве V_n, $n\geqslant 3$, имеет максимальный порядок $r=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ тогда и только тогда, когда V_n конформно плоскому пространству.*

Выпишем для справок инфинитезимальные операторы группы конформных движений в конформно-плоских пространствах. При этом достаточно рассмотреть плоское пространство с положительно определенной метрикой; переход к случаю произвольной сигнатуры легко осуществляется формальной заменой соответствующих вещественных переменных x^i на $\sqrt{-1}\,x^i$. Пусть S_n — плоское пространство, в котором введена декартова система координат: $g_{ij}=\delta_{ij}$. В этой системе координат все символы Кристоффеля Γ^k_{ij} равны нулю, а $\xi_i=\xi^i$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$. Поэтому обобщенные уравнения Киллинга (8.3) имеют вид

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}=\Phi\delta_{ij}. \tag{8.23}$$

Общее решение этих уравнений хорошо известно и может быть записано в следующей форме:

$$\xi^i=A_j(2x^ix^j-|x|^2\delta^{ij})+a^i_jx^j+bx^i+c^i, \tag{8.24}$$

где $a^i_j=-a^j_i$, A_i, a^i_j $(i<j)$, c^i $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$ и b — произвольные постоянные, а $|x|^2=(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2$.

В согласии с приведенной выше теоремой решение зависит от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ произвольных постоянных. Полагая последовательно одну из этих постоянных равной 1, а другие равными 0 получаем базисные операторы группы конформных движений в S_n,

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i < j),$$

$$Y_i = (2x^i x^j - |x|^2 \delta^{ij}) \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{8.25}$$

$$Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

8.4. Пространства с определенной метрикой. Как отмечалось выше, любое конформно-плоское пространство имеет нетривиальную группу конформных движений. Задача классификации всех римановых пространств с нетривиальной конформной группой в случае пространств V_n произвольной сигнатуры не решена. Однако в двух случаях (когда V_n либо имеет лоренцеву сигнатуру $(-\ldots-+)$, либо является пространством с определенной метрикой), особенно важных в геометрии и физике, имеется полное описание множества пространств с нетривиальной конформной группой. Рассмотрим сначала более простой случай пространств с определенной метрикой. В этом случае задачу решает следующая теорема (см. Yano [1], стр. 275; приводимое ниже доказательство принадлежит Suguri, Ueno [1]).

Теорема. *Пространство V_n, $n \geqslant 3$, с определенной метрикой имеет нетривиальную группу конформных движений тогда и только тогда, когда V_n конформно плоскому пространству.*

Доказательство. Достаточно показать, что всякое пространство V_n с положительно определенной метрической формой (6.4) и не конформное плоскому пространству имеет только тривиальную группу конформных движений. Будем считать $n > 3$; в случае $n=3$ тензор C^l_{ijk} надо заменить на тензор R_{ijk}, определенный формулой (8.17).

Запишем обобщенные уравнения Киллинга (8.3) для контравариантных компонент метрического тензора:

$$\mathfrak{L} g^{ij} = -\Phi g^{ij}, \tag{8.26}$$

и рассмотрим функцию

$$C^2 = g_{l_1 l_2} g^{i_1 i_2} g^{j_1 j_2} g^{k_1 k_2} C^{l_1}_{i_1 j_1 k_1} C^{l_2}_{i_2 j_2 k_2}. \tag{8.27}$$

Эта функция не обращается в нуль тождественно. Действительно, выберем точку $x \in V_n$, в которой тензор Вейля отличен от нуля, и заменой координат приведем метрический тензор в этой точке к виду $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Тогда $C^2(x) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (C^l_{ijk}(x))^2 > 0$. Поэтому можно осуществить переход V_n в конформное ему пространство

$\tilde{V}_n$ преобразованием

$$\tilde{g}_{ij} = Cg_{ij}. \tag{8.28}$$

Так как $\mathfrak{L}C^2 = 2C\mathfrak{L}C$ и в силу формул (8.3), (8.26), (8.27) $\mathfrak{L}C^2 = -2\Phi C^2$, то

$$\mathfrak{L}C + \Phi C = 0. \tag{8.29}$$

Поэтому

$$\mathfrak{L}\tilde{g}_{ij} = \mathfrak{L}(Cg_{ij}) = g_{ij}\mathfrak{L}C + C\mathfrak{L}g_{ij} = (\mathfrak{L}C + \Phi C)\, g_{ij} = 0,$$

так что группа конформных движений в V_n является группой изометрических движений в конформном пространстве $\tilde{V}_n$.

8.5. Лоренцевы пространства. Доказательство теоремы 8.4 не переносится на случай пространств V_n с неопределенной метрикой, так как для таких V_n функция C, определенная формулой (8.27), может обращаться в нуль и при отличном от нуля тензоре конформной кривизны. Утверждение, подобное теореме 8.4, в этом случае неверно: существуют пространства с лоренцевой сигнатурой $(- \ldots - +)$, имеющие нетривиальную группу конформных движений, и не конформные плоскому пространству. Это — пространства V_{n+1}, $n \geqslant 3$, с метрической формой

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}(x^1 - x^0)\, dx^i\, dx^j, \tag{8.30}$$

где $[a_{ij}]$ — произвольная положительно определенная матрица с элементами, зависящими от одной переменной $x^1 - x^0$. Группа конформных движений в каждом пространстве V_{n+1} с метрикой вида (8.30) (а также в любом пространстве, конформном такому V_{n+1}) нетривиальна, в общем случае зависит от $2n$ параметров и имеет инфинитезимальные операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$Y_i = x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \sum_{j=2}^{n} A^{ij}(x^1 - x^0)\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i = 2, \ldots, n), \tag{8.31}$$

$$Z = (x^0 + x^1)\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \sum_{j=2}^{n} x^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

где $A^{ij}(\tau) = \int a^{ij}(\tau)\, d\tau$, $[a^{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$. Кроме того, существуют коэффициенты $a_{ij}(x^1 - x^0)$ специального вида, когда группа конформных движений расширяется (например, для $n = 3$ см. Петров [1], §§, 41, 27) и имеет размерность либо $2n + 1$ (если V_{n+1} не является конформно-плоским пространством), либо $\frac{1}{2}(n+2) \times \times (n+3)$ (тогда V_{n+1} конформно плоскому пространству).

Рассмотрим частный случай $n=3$. В этом случае метрика (8.30) будет использоваться в более простом виде, так как один из произвольных коэффициентов, скажем a^{33}, можно исключить путем перехода к конформному пространству. Метрический тензор

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{22} & -a^{23} & 0 \\ 0 & -a^{23} & -a^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

пространства V_4 рассматриваемого типа приводится сначала к виду

$$[\overline{g}^{ij}]=\begin{bmatrix} -a^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{22} & -a^{23} & 0 \\ 0 & -a^{23} & -a^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{33} \end{bmatrix}$$

заменой координат

$$\overline{x^0}=\frac{1}{2}(x^0+x^1-A^{33}(x^1-x^0)),\quad \overline{x^1}=\frac{1}{2}(x^0+x^1+A^{33}(x^1-x^0)),$$
$$\overline{x^2}=x^2,\quad \overline{x^3}=x^3,$$

где, как и выше, $A^{33}(x^1-x^0)$ означает первообразную функции $a^{33}(x^1-x^0)$. После этого переход к конформному пространству с метрическим тензором $g^{ij}=\frac{1}{a^{33}}\overline{g}^{ij}$ позволяет исключить из рассмотрения функцию a^{33}. Таким образом, всякое пространство V_4 с метрикой вида (8.30) можно конформно преобразовать в пространство с метрическим тензором

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(x-t) & -\varphi(x-t) & 0 \\ 0 & -\varphi(x-t) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad f-\varphi^2>0. \tag{8.32}$$

Здесь использованы индивидуальные обозначения $t=x^0$, $x=x^1$, $y=x^2$, $z=x^3$ и контравариантные компоненты метрического тензора, более удобные в дальнейшем при рассмотрении римановых пространств, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка.

Пространства V_{n+1} с метрикой (8.30) вместе с конформными им пространствами исчерпывают все множество лоренцевых пространств с нетривиальной конформной группой. Для $n=3$ это доказал Билялов [1] (полное изложение доказательства содержится в книге Петрова [1], § 41; см. также Ибрагимов [11], § 9); обобщение на случай произвольных $n\geqslant 3$ недавно получил Чупахин [1]. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Риманово пространство V_{n+1}, $n\geqslant 3$, с лоренцевой сигнатурой имеет нетривиальную группу конформных движе-*

ний тогда и только тогда, когда V_{n+1} конформно пространству с метрикой (8.30).

Следствие. *Всякое лоренцево пространство с нетривиальной конформной группой конформно пространству с $R_{ij}=0$.*

Доказательство. Покажем это для пространств V_4; общий случай рассматривается аналогично. Для V_4 с метрическим тензором (8.32) все компоненты тензора Риччи равны нулю за исключением

$$R_{11}=R_{00}=-R_{10}=h(x^1-x^0),$$

где функция $h(x^1-x^0)$ выражается через $f(x^1-x^0)$, $\varphi(x^1-x^0)$ и в общем случае отлична от нуля. Конформное пространство $\tilde{V}_4$, удовлетворяющее условию $\tilde{R}_{ij}=0$, будем искать по формуле (8.1) с функцией $\sigma=\sigma(x^1-x^0)$. В этом случае $\Delta_2\sigma=0$, $\Delta_1\sigma=0$, и по формулам преобразования тензора Риччи при переходе к конформному пространству имеем

$$\tilde{R}_{11}=\tilde{R}_{00}=-\tilde{R}_{10}=R_{11}+2(\sigma''-(\sigma')^2),$$

где σ' — производная от σ. Поэтому решение $\sigma\neq 0$ обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\sigma''-(\sigma')^2+\frac{1}{2}h(x^1-x^0)=0$$

реализует необходимое конформное отображение пространства V_4.

Среди пространств с метрикой (8.30) полезно выделить конформно-плоские. Для этого надо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (6.15) относительно функций $a_{ij}(x^1-x^0)$. Рассмотрим следующий простой случай метрики (8.30):

$$a_{ij}=0\ (i\neq j),\ a_{ii}=-1\ (i=2,\ \ldots,\ n-1),\ a_{nn}=f(x^1-x^0). \quad (8.33)$$

Одной из компонент тензора (6.14), не равной нулю тождественно, является

$$C^1_{n1n}=R^1_{n1n}+\frac{1}{n-1}(R_{nn}-fR^1_1)+\frac{f}{n(n-1)}R.$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля равны

$$\Gamma^0_{nn}=\Gamma^1_{nn}=-\frac{1}{2}f',\quad \Gamma^n_{1n}=-\Gamma^n_{0n}=\frac{1}{2}(\ln f)',$$

и формулы (6.10), (6.12), (6.13) дают

$$R^1_{n1n}=fR^1_1,$$

$$R_{ii}=0\quad (i=2,\ \ldots,\ n),\quad R_{00}=R_{11}=-R^1_1=\frac{1}{2f}\left(f''-\frac{f'^2}{2f}\right),\ R=0.$$

Поэтому $C^1_{n1n}=\frac{n-2}{n-1}fR^1_1$, и равенство $C^1_{n1n}=0$ принимает вид

дифференциального уравнения

$$f''-\frac{f'^2}{2f}=0,$$

имеющего общее решение

$$f=(a(x^1-x^0)+b)^2, \qquad a,\ b=\text{const}. \tag{8.34}$$

Остальные компоненты тензора C^l_{ijk} также обращаются в нуль в силу (8.34) (более того, $R^l_{ijk}=0$). Следовательно, метрика (8.33) определяет конформно-плоское пространство V_{n+1} тогда и только тогда, когда функция f имеет вид (8.34).

При $n=3$ все конформно-плоские пространства с метрикой (8.30) выделил Лапко [1]. В этом случае достаточно рассмотреть пространства V_4 с метрическим тензором вида (8.32) и найти все функции f и φ, удовлетворяющие уравнениям (6.15). Общее решение этих уравнений выражается формулами

$$f=[a(x-t)+b]^{-2}+\alpha^2, \qquad \varphi=\alpha; \tag{8.35}$$

$$f=\alpha^2, \qquad \varphi=\frac{\alpha\,[a(x-t)+b]}{(1+[a(x-t)+b]^2)^{1/2}}; \tag{8.36}$$

$$f=\frac{\beta}{(\beta^2-1)^{1/2}}\varphi+\frac{4\alpha^2-\beta^2}{4(\beta^2-1)}, \quad \varphi=\frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,[a(x-t)+b]}{(1+\beta^2\,\mathrm{tg}^2\,[a(x-t)+b])^{1/2}}+\frac{\beta}{2(\beta^2-1)^{1/2}}, \tag{8.37}$$

где постоянные a, b, α, β должны выбираться в соответствии с условием гиперболичности $f-\varphi^2>0$.

Для завершения локальной классификации лоренцевых пространств с нетривиальной конформной группой нужно провести разбиение пространств с метрикой плоской волны (8.30) на классы конформно-эквивалентных пространств. Эта задача не решена, хотя имеется обобщение классического алгоритма Кристоффеля для исследования проблемы эквивалентности квадратичных форм на случай конформной эквивалентности (Лапко [1]). Можно получить простой пример конформно не эквивалентных друг другу пространств с нетривиальной конформной группой, если в (8.32) положить $\varphi=0$, а в качестве f выбирать функции

$$1,\ e^{x-t},\ \ e^{-(x-t)^2}. \tag{8.38}$$

Указанные пространства допускают конформные группы, имеющие максимальный порядок 15, 7 и 6 соответственно.

§ 9. Групповой анализ уравнений Эйнштейна

9.1. Гармонические координаты. В некоторых вопросах геометрии и теории гравитации удобно пользоваться так называемыми гармоническими системами координат в римановых пространствах (Lanczos [1], Фок [1]). В плоском пространстве S_n декартовы координаты являются гармоническими. В случае про-