дифференциального уравнения

$$f''-\frac{f'^2}{2f}=0,$$

имеющего общее решение

$$f=(a(x^1-x^0)+b)^2, \qquad a,\ b=\text{const}. \tag{8.34}$$

Остальные компоненты тензора C^l_{ijk} также обращаются в нуль в силу (8.34) (более того, $R^l_{ijk}=0$). Следовательно, метрика (8.33) определяет конформно-плоское пространство V_{n+1} тогда и только тогда, когда функция f имеет вид (8.34).

При $n=3$ все конформно-плоские пространства с метрикой (8.30) выделил Лапко [1]. В этом случае достаточно рассмотреть пространства V_4 с метрическим тензором вида (8.32) и найти все функции f и φ, удовлетворяющие уравнениям (6.15). Общее решение этих уравнений выражается формулами

$$f=[a(x-t)+b]^{-2}+\alpha^2, \qquad \varphi=\alpha; \tag{8.35}$$

$$f=\alpha^2, \qquad \varphi=\frac{\alpha\,[a(x-t)+b]}{(1+[a(x-t)+b]^2)^{1/2}}; \tag{8.36}$$

$$f=\frac{\beta}{(\beta^2-1)^{1/2}}\varphi+\frac{4\alpha^2-\beta^2}{4(\beta^2-1)}, \quad \varphi=\frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,[a(x-t)+b]}{(1+\beta^2\,\mathrm{tg}^2\,[a(x-t)+b])^{1/2}}+\frac{\beta}{2(\beta^2-1)^{1/2}}, \tag{8.37}$$

где постоянные a, b, α, β должны выбираться в соответствии с условием гиперболичности $f-\varphi^2>0$.

Для завершения локальной классификации лоренцевых пространств с нетривиальной конформной группой нужно провести разбиение пространств с метрикой плоской волны (8.30) на классы конформно-эквивалентных пространств. Эта задача не решена, хотя имеется обобщение классического алгоритма Кристоффеля для исследования проблемы эквивалентности квадратичных форм на случай конформной эквивалентности (Лапко [1]). Можно получить простой пример конформно не эквивалентных друг другу пространств с нетривиальной конформной группой, если в (8.32) положить $\varphi=0$, а в качестве f выбирать функции

$$1,\ e^{x-t},\ \ e^{-(x-t)^2}. \tag{8.38}$$

Указанные пространства допускают конформные группы, имеющие максимальный порядок 15, 7 и 6 соответственно.

§ 9. Групповой анализ уравнений Эйнштейна

9.1. Гармонические координаты. В некоторых вопросах геометрии и теории гравитации удобно пользоваться так называемыми гармоническими системами координат в римановых пространствах (Lanczos [1], Фок [1]). В плоском пространстве S_n декартовы координаты являются гармоническими. В случае про-

извольных пространств V_n гармонические координаты определяются условиями

$$\Gamma^i \equiv g^{ik}\Gamma^i_{jk} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9.1}$$

Так как символы Кристоффеля Γ^i_{jk}, а вместе с ними и величины Γ^i не обладают тензорным характером относительно общих преобразований координат, то уравнения (9.1) действительно выделяют специальные системы координат.

Перепишем координатные условия (9.1) в терминах многообразия $\mathfrak{G}$, заданного уравнениями (6.1). Свертывая равенства

$$g^{ij}_{,k} \equiv \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + g^{il}\Gamma^j_{lk} + g^{jl}\Gamma^i_{lk} = 0$$

по индексам k, j и пользуясь формулами

$$\Gamma^j_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \ln |g|^{1/2}, \quad |g| = |\det[g_{ij}]|,$$

получаем

$$\Gamma^i = -|g|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^j} (|g|^{1/2} g^{ij}).$$

Поэтому условия (9.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (|g|^{1/2} g^{ij}) = 0. \tag{9.2}$$

Таким образом, гармонические системы координат в римановы пространствах задаются решениями (6.1) следующей системы диф ференциальных уравнений в частных производных первого по рядка:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (|y|^{1/2} y^{ij}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{9.3}$$

где $|y| = |\det[y_{ij}]|$, $[y^{ij}] = [y_{ij}]^{-1}$. Эти уравнения определяют гармонические координаты в семействе всех n-мерных римановых пространств. Для выделения множества гармонических систем координат в одном определенном пространстве V_n нужно взять только те решения уравнений (9.3), которые задают эквивалентные между собой многообразия $\mathfrak{G}$, соответствующие рассматриваемому пространству V_n.

Уравнения (9.3) не инвариантны относительно произвольных преобразований вида (6.21). Поэтому общая группа движений в V_n не сохраняет свойство гармоничности системы координат в этом пространстве. Найдем максимальную подгруппу общей группы движений, сохраняющую множество всех гармонических систем координат в V_n*).

*) Задача полного описания преобразований, переводящих одну фиксированную гармоническую систему координат в некоторые гармонические системы координат, является более сложной и пока не решена. При исследовании этой задачи наряду с локальными условиями (9.1) задаются еще дополнительные условия на бесконечности (см. Фок [1], § 93).

Пусть G — группа преобразований (6.18), а $\tilde{G}$ — ее продолжение по формулам (6.21).

Определение. Группа G называется *группой, сохраняющей гармонические системы координат в пространстве* V_n, если для всех $\tilde{T} \in \tilde{G}$ и для каждой гармонической системы координат $\mathfrak{G}$ в V_n преобразованная система координат $\overline{\mathfrak{G}} = \tilde{T}(\mathfrak{G})$ является гармонической.

Лемма 1. *Продолжение $\tilde{G}$ группы G допускается системой дифференциальных уравнений* (9.3) *тогда и только тогда, когда G — группа линейных преобразований*

$$\overline{x}^i = a^i_k x^k + b^i, \tag{9.4}$$

где a^i_k, b^i — произвольные постоянные.

Доказательство. Введем обозначения

$$z^{ij} = |y|^{1/2} y^{ij}, \quad \theta^{ij}_k = \frac{\partial z^{ij}}{\partial x^k}$$

и перепишем уравнения (9.3) в виде

$$\theta^{ij}_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9.5}$$

В переменных z^{ij} преобразования (6.21) имеют вид

$$\overline{x}^i = f^i(x, a),$$
$$J\left(\frac{\overline{x}}{x}\right) \overline{z}^{ij} = z^{kl} \frac{\partial f^i(x, a)}{\partial x^k} \frac{\partial f^j(x, a)}{\partial x^l}, \tag{9.6}$$

где $J\left(\frac{\overline{x}}{x}\right)$ — якобиан преобразования $\overline{x}^i = f^i(x, a)$.

Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы преобразований (9.6) равен (см. формулу (6.24))

$$\tilde{X} = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(z^{ik} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} + z^{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - z^{ij} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial z^{ij}}. \tag{9.7}$$

Если

$$\underset{1}{X} = \tilde{X} + \zeta^{ij}_k \frac{\partial}{\partial \theta^{ij}_k}$$

— оператор группы, полученной продолжением преобразований (9.6) на величины θ^{ij}_k, то условие инвариантности уравнений (9.5) имеет вид

$$\underset{1}{X} \theta^{ij}_j |_{(9.5)} = \zeta^{ij}_j |_{(9.5)} = 0. \tag{9.8}$$

По формулам продолжения (4.8)

$$\zeta^{ij}_k = z^{il} \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^l \partial x^k} + z^{jl} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^l \partial x^k} - z^{ij} \frac{\partial^2 \xi^l}{\partial x^l \partial x^k} + \theta^{il}_k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} + \theta^{jl}_k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} -$$
$$- \theta^{ij}_k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^l} - \theta^{ij}_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k}. \tag{9.10}$$

Поэтому уравнения (9.8) имеют вид

$$z^{jk}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^k}=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{9.11}$$

В уравнениях (9.11) все величины x^i, z^{ij} играют роль независимых переменных, поэтому

$$\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\,\partial x^k}=0 \qquad (i,\ j,\ k=1,\ \ldots,\ n).$$

Решение этих уравнений определяет общую линейную группу преобразований (9.4).

Лемма 2. *Группа G движений в пространстве V_n сохраняет гармонические координаты в V_n тогда и только тогда, когда система дифференциальных уравнений* (9.3) *инвариантна относительно продолженной группы $\tilde{G}$.*

Доказательство. Пусть система уравнений (9.3) инвариантна относительно группы $\tilde{G}$. Так как в этом случае всякий элемент $\tilde{T}\in\tilde{G}$ преобразует каждое решение уравнений (9.3) снова в решение и $\tilde{T}(\mathfrak{G})\sim\mathfrak{G}$, то любая гармоническая система координат $\mathfrak{G}$ в пространстве V_n переводится преобразованием $\tilde{T}\in\tilde{\mathfrak{G}}$ в некоторую гармоническую систему координат $\bar{\mathfrak{G}}=\tilde{T}(\mathfrak{G})$ в том же пространстве V_n.

Пусть теперь известно, что группа G сохраняет гармонические системы координат в V_n. Воспользуемся замечанием 3.4, взяв в качестве M многообразие в пространстве переменных $(x^i,\ z^{ij},\ \theta_k^{ij})$, заданное уравнениями (9.5), а в качестве $N\subset M$ — совокупность всех гармонических систем координат в пространстве V_n, т. е. совокупность тех эквивалентных между собой многообразий $\mathfrak{G}$, которые задаются решениями (6.1) уравнений (9.3) и определяют метрический тензор рассматриваемого пространства V_n. Так как G сохраняет гармонические системы координат в V_n, то продолжение группы G на переменные x^i, z^{ij}, θ_k^{ij} удовлетворяет условиям замечания 3.4. Поэтому

$$\zeta_l^{ij}\big|_N=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{9.12}$$

где величины ζ_k^{ij} имеют вид (9.10). Из леммы 1 следует, что линейные преобразования сохраняют гармонические системы координат в любом пространстве. С другой стороны, нетрудно видеть, что образ любого многообразия $\mathfrak{G}$ вида (6.1) при общих линейных преобразованиях (9.4) содержит открытое множество пространства переменных $(x^i,\ y_{ij})$. Взяв здесь некоторое $\mathfrak{G}\in N$, получим, что на многообразии N все величины x^i, z^{ij} $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$ могут рассматриваться как независимые переменные. Поэтому уравнения

(9.12) и (9.11) равносильны, так как (9.12) можно записать в виде

$$z^{jk}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\,\partial x^k}\bigg|_N=0.$$

Следовательно, система уравнений (9.3) допускает группу $\tilde{G}$.

Теорема (Ибрагимов [3]). *Для любого риманова пространства V_n максимальная группа движений G, сохраняющая гармонические системы координат, совпадает с общей линейной группой преобразований* (9.4).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 1 и 2.

9.2. Группа, допускаемая уравнениями Эйнштейна. Общековариантность (т. е. независимость от выбора системы координат) уравнений Эйнштейна

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}=T_{ik},\quad T^{ik}_{,k}=0\qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ 4)\qquad (9.13)$$

можно интерпретировать, отождествляя g_{ij} с переменными y_{ij} (см. § 6.1 и § 9.3), как инвариантность относительно бесконечной группы преобразований (6.21) с произвольными $f^i(x)$. Для применения методов группового анализа в полном объеме к уравнениям Эйнштейна необходимо выяснить, является ли эта группа максимальной группой точечных преобразований

$$\begin{aligned} x'^i&=f^i(x,\ y),\\ y'_{ij}&=\varphi_{ij}(x,\ y),\end{aligned}\qquad (9.14)$$

допускаемой уравнениями (9.13).

Рассмотрим для простоты случай свободного пространства, когда тензор энергии-импульса T_{ik} равен нулю. Формулу (6.12), используя для частных производных обозначения $g_{ij\,|\,k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, $g_{ij\,|\,kl}=\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l}$, удобно переписать в виде

$$2R_{ik}=g^{lm}(g_{lk\,|\,im}+g_{im\,|\,lk}-g_{lm\,|\,ik}-g_{ik\,|\,lm})+P_{ik}[g],$$

где $P_{ik}[g]=2g^{lm}(\Gamma^n_{im}\Gamma_{nlk}-\Gamma^n_{ik}\Gamma_{nlm})$, $\Gamma_{nlk}=g_{nm}\Gamma^m_{lk}$. В этих обозначениях уравнения Эйнштейна

$$R_{ik}=0\qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ 4)\qquad (9.15)$$

записываются в виде следующей квазилинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$2R_{ik}[y]\equiv y^{lm}(y_{lk\,|\,im}+y_{im\,|\,lk}-y_{lm\,|\,ik}-y_{ik\,|\,lm})+P_{ik}[y]=0\qquad (9.16)$$

относительно зависимых переменных y_{ij} ($y_{ij}=y_{ji}$; $y^{ij}y_{jk}=\delta^i_k$).

Пусть

$$X=\xi^i(x,\ y)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta_{ij}(x,\ y)\frac{\partial}{\partial y_{ij}}$$

— оператор группы преобразований вида (9.14), а

$$\underset{2}{X}=X+\zeta_{ijk}\frac{\partial}{\partial y_{ij\mid k}}+\zeta_{ijkl}\frac{\partial}{\partial y_{ij\mid kl}}$$

— второе продолжение этого оператора, где в соответствии с формулами продолжения (4.8), (4.10)

$$\begin{aligned}\zeta_{ijk}&=D_k(\eta_{ij})-y_{ij\mid m}D_k(\xi^m),\\ \zeta_{ijkl}&=D_l(\zeta_{ijk})-y_{ij\mid km}D_l(\xi^m).\end{aligned}\tag{9.17}$$

Определяющее уравнение (4.12) группы, допускаемой системой (9.16), можно записать с неопределенными множителями Ω^{jl}_{ik} в виде

$$\underset{2}{X}R_{ik}[y]=\Omega^{jl}_{ik}R_{jl}[y]\tag{9.18}$$

и рассматривать все величины x^i, y_{ij}, $y_{ij\mid k}$, $y_{ij\mid kl}$ в качестве независимых переменных. Согласно формулам (9.16) и (9.17) левые части равенств (9.18) зависят от величин $y_{ij\mid kl}$ линейно. Поэтому множители Ω^{jl}_{ik} являются функциями только переменных x^i, y_{ij}, $y_{ij\mid k}$. Это позволяет отделить в (9.18) члены, содержащие величины $y_{ij\mid kl}$, и записать определяющее уравнение как переопределенную систему дифференциальных уравнений для функций ξ^i, η_{ij}. Стандартный анализ полученных уравнений приводит к следующему общему решению определяющего уравнения (9.18):

$$\xi^i=\xi^i(x),\qquad \eta_{ij}=-\left(\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}y_{kj}+\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}y_{ki}\right)+cy_{ij},\tag{9.19}$$

где $\xi^i(x)$ — произвольные функции, $c=\text{const}$. Сравнив формулы (9.19) и (6.24), можно сформулировать окончательный результат (Ибрагимов [1], § 6; глобальную инвариантность рассмотрел Pham Mau Quan [1]).

Теорема. *Преобразования* (6.21) *вместе с однопараметрической группой растяжений*

$$y'_{ij}=ay_{ij}\tag{9.20}$$

образуют максимальную группу точечных преобразований (9.14), *допускаемую уравнениями* (9.16).

9.3. Разложение Ли — Вессио. В соответствии с общей теорией Ли — Вессио (см. § 4.2) и теоремой 9.2 уравнения (9.16) можно разложить на разрешающую и автоморфную системы относительно любой подгруппы бесконечной группы преобразований (6.21), (9.20). В общей теории относительности неявно осуществляется такое разложение с помощью группы преобразований (6.21). Это

достигается путем включения эквивалентности относительно преобразований (6.21) в понятие решения уравнений Эйнштейна. Решением уравнений (9.15) называется не отдельное решение

$$\mathfrak{G}:\ y_{ij}=g_{ij}(x) \tag{9.21}$$

дифференциальных уравнений (9.16), а соответствующее риманово пространство V_4, т. е. семейство всех решений

$$\overline{\mathfrak{G}}:\ y_{ij}=\overline{g}_{ij}(x), \tag{9.22}$$

эквивалентных (9.21). Согласно такому определению решения, уравнения Эйнштейна описывают классы g_{ij} эквивалентных решений уравнений (9.16). Это означает, что уравнения (9.15) представляют собой разрешающую систему для дифференциальных уравнений (9.16). Для реализации разрешающей системы (9.15) как системы уравнений для представителей различных классов эквивалентности достаточно зафиксировать систему координат в V_4. При этом автоморфная система, которая описывает преобразования системы координат по формулам (6.2), физического интереса не представляет и поэтому не рассматривается. В соответствии с общими свойствами разрешающей системы действие преобразований (6.21) на решения уравнений (9.15) является тривиальным (тождественным). Поэтому максимальная группа, допускаемая разрешающей системой (9.15), состоит из преобразований (9.20).

Рассмотрим случай, соответствующий выбору гармонических координат. Согласно теореме 9.1 гармонические системы координат определяются с точностью до линейных преобразований. В соответствии с этим разложение Ли — Вессио уравнений (9.16) осуществляется не всей группой координатных преобразований (6.21), а некоторой ее подгруппой. Разрешающая система получается присоединением к (9.16) дифференциальных уравнений первого порядка (9.3) и в соответствии с леммой 9.11 и теоремой 9.2 допускает группу линейных преобразований (9.4).

Использование гармонических координат удобно, например, при исследовании задачи Коши для уравнений Эйнштейна, так как в этих координатах система уравнений (9.16) имеет гиперболический тип на любом решении, и поэтому задача Коши корректна в классе функций конечной гладкости (см. Lichnerowicz [1] и работы Choquet-Bruhat, например, Fourés-Bruhat [1], а также Choquet-Bruhat, Christodoulou, Francaviglia [1]). В произвольной системе координат уравнения Эйнштейна не являются гиперболическими. Такая зависимость типа уравнения от выбора системы координат, необычная для теории дифференциальных уравнений, связана с определением решения уравнений Эйнштейна как класса эквивалентных решений уравнений (9.16). Ввиду нелинейности системы дифференциальных уравнений (9.16) ее тип зависит от решения, поэтому при переходе от решения (9 21) к произвольному

эквивалентному решению (9.22) тип рассматриваемой системы, естественно, изменяется.

9.4. Точные решения. Ввиду сложности общего анализа задач теории гравитации возникает необходимость выяснения характерных особенностей этих задач путем изучения частных точных решений уравнений Эйнштейна. Точные решения, ставшие теперь классическими, первоначально были найдены путем априорного требования определенной симметрии искомых решений. Например, метрика Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) + \left(1-\frac{1}{r}\right) dt^2 \quad (9.23)$$

получается подстановкой в уравнения (9.15) общей центрально-симметрической метрики

$$ds^2 = A\, dr^2 + B(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) + C\, dt^2 + D\, dr\, dt, \quad (9.24)$$

где t — время, r, θ, φ — сферические координаты пространственной точки, связанные с декартовыми координатами x^i $(i=1, 2, 3)$ соотношениями

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta, \quad (9.25)$$

коэффициенты A, B, C, D — произвольные функции от r, t. Центральная симметрия означает, что рассматриваемое пространство V_4 допускает в качестве изометрических движений трехпараметрическую группу пространственных вращений. В других случаях частные решения также ищутся как пространства V_4, которые обладают определенной группой изометрий. Подробное описание возможных локальных решений подобного типа вместе с группами изометрий имеется в книге Петрова [1].

Обобщая этот классический способ, в основу построения точных решений можно положить произвольные движения, введенные в § 6. В этом случае по заданной группе G нужно найти пространства V_4 гиперболического типа, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна и допускающие G в качестве группы движений дефекта δ. Значение $\delta=0$ соответствует, как видно из теорем 6.3 и 7.1, уже рассмотренному случаю групп изометрических движений.

Алгоритм построения таких частных решений вытекает из определения 6.3 и описан в § 4.3. При этом уравнения Эйнштейна отождествляются с системой дифференциальных уравнений (9.16). Согласно теореме 7.1 отыскание пространств V_4, обладающих группой изометрий G и удовлетворяющих равенствам (9.15), равносильно построению инвариантных (относительно группы $\tilde{G}$, полученной продолжением G по формулам (6.21)) решений (9.21) уравнений (9.16). Аналогично пространства V_4, имеющие некоторую заданную группу G в качестве группы движений дефекта δ, получаются с по

мощью продолженной группы $\tilde{G}$ как частично инвариантные решения дефекта δ уравнений (9.16).

В соответствии с условиями (4.20) можно выделить следующие 24 типа пространств V_4, обладающих нетривиальной (т. е. не сводящейся к тождественному преобразованию и не совпадающей с общей группой всех движений (6.18)) группой движений:

$$\delta=0,\ \rho\begin{cases}3(1)\\2(2)\\1(3)\\0(4)\end{cases};\quad \delta=1,\ \rho\begin{cases}3(2)\\2(3)\\1(4)\\0(5)\end{cases};\quad \delta=2,\ \rho\begin{cases}3(3)\\2(4)\\1(5)\\0(6)\end{cases};$$
$$\delta=3,\ \rho\begin{cases}3(4)\\2(5)\\1(6)\\0(7)\end{cases};\quad \delta=4,\ \rho\begin{cases}3(5)\\2(6)\\1(7)\\0(8)\end{cases};\quad \delta=5,\ \rho\begin{cases}3(6)\\2(7)\\1(8)\\0(9)\end{cases}. \tag{9.26}$$

Здесь указаны значения дефекта δ и ранга ρ частично инвариантного решения, которые полностью определяют тип рассматриваемого решения. Для наглядности в скобках указано также значение ранга $r_*=r_*(\xi, \eta)$ матрицы (3.15), составленной из координат базисных инфинитезимальных операторов (6.24) группы $\tilde{G}_r$; числа δ, ρ, r_* связаны равенством (4.21). Тип частично инвариантного решения, или соответствующего пространства V_4, будет обозначаться символом $[\delta, \rho(r_*)]$. Хотя неравенства (4.20) позволяют дефекту δ принимать также значения 6, 7, 8, 9, однако эти случаи можно исключить из рассмотрения путем выбора определенной системы координат. Особый интерес представляют решения ранга $\rho=1$, там как в этом случае задача сводится в основном к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $10-\delta$ функций. Многие из таких решений описываются динамическими системами с алгебраическими нелинейностями и могут быть подвергнуты качественному анализу современными геометрическими методами (см. Хокинг, Эллис [1], Дубровин, Новиков, Фоменко [1], Богоявленский, Новиков [1] и Богоявленский [1]).

Приводимый ниже пример достаточно ясно иллюстрирует алгоритм построения частично инвариантных решений, когда дефект $\delta\neq 0$. Ищется решение типа $[1, 0(5)]$, допускающее в качестве группы движений дефекта $\delta=1$ группу G_5 с базисными операторами

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}\quad (i=1, \ldots, 4),\qquad X_5=x^1\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

В синхронной системе координат, определяемой уравнениями

$$g_{k4}=0\quad (k=1, 2, 3),\qquad g_{44}=-1,$$

формулы продолжения (6.24) дают

$$\tilde{X}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \tilde{X}_5 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - 2y_{12} \frac{\partial}{\partial y_{11}} - y_{22} \frac{\partial}{\partial y_{12}} - y_{23} \frac{\partial}{\partial y_{13}}.$$

Из уравнений

$$\tilde{X}_i J = 0, \qquad i = 1, \ldots, 5,$$

относительно функции $J = J(x, y)$ находятся следующие независимые инварианты продолженной группы $\tilde{G}_5$:

$$\begin{aligned} &J_1 = y_{11}y_{22} - y_{12}^2, \quad J_2 = y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}, \\ &J_3 = y_{22}, \quad J_4 = y_{23}, \quad J_5 = y_{33}. \end{aligned} \tag{9.27}$$

Так как здесь ищутся частично инвариантные решения ранга $\rho = 0$, то уравнения (4.22) для таких решений имеют вид

$$J_\alpha = C_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, 5), \quad C_\alpha = \text{const}. \tag{9.28}$$

Равенства (9.27) и (9.28) дают

$$y_{11} = \frac{1}{C_3}(C_1 + f^2), \quad y_{13} = \frac{1}{C_3}(C_4 f - C_2),$$

$$y_{22} = C_3, \quad y_{23} = C_4, \quad y_{33} = C_5,$$

где $f = y_{12}$ — свободная переменная, которая выбирается в качестве произвольной функции от x в соответствии с § 4.3. Простой заменой координат можно добиться выполнения условий $C_1 = C_4 = 0$, $C_2 = -C_3 = 1$ и записать общий вид искомой метрики:

$$ds^2 = -(f(x)\,dx^1 - dx^2)^2 + 2\,dx^1\,dx^3 + C(dx^3)^2 - (dx^4)^2. \tag{9.29}$$

Для метрики (9.29) отличны от нуля следующие символы Кристоффеля:

$$\Gamma^1_{11} = ff_3, \quad \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{2}f_3, \quad \Gamma^2_{11} = f^2 f_3 - ff_2 - f_1,$$

$$\Gamma^2_{12} = -\frac{1}{2}ff_3, \quad \Gamma^2_{13} = -\frac{1}{2}f_3, \quad \Gamma^2_{14} = -\frac{1}{2}f_4, \quad \Gamma^3_{11} = f^2 f_2,$$

$$\Gamma^3_{12} = -ff_2, \quad \Gamma^3_{13} = -\frac{1}{2}ff_3, \quad \Gamma^3_{22} = f_2, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}f_3,$$

$$\Gamma^3_{14} = -\frac{1}{2}ff_4, \quad \Gamma^3_{24} = \frac{1}{2}f_4, \quad \Gamma^4_{11} = -ff_4, \quad \Gamma^4_{12} = \frac{1}{2}f_4.$$

Подстановка этих формул в уравнения (9.16) дает

$$C=0, \quad f=ax^2+\left[-2\left(\frac{da}{dx^1}+a^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} x^4, \tag{9.30}$$

где $a=a(x^1)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\frac{da}{dx^1}+a^2<0$. Полученная метрика

$$ds^2=-(f\,dx^1-dx^2)^2+2\,dx^1\,dx^3-(dx^4)^2 \tag{9.31}$$

с функцией $f(x)$ вида (9.30) определяет пространство V_4, удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна (9.15) и допускающее G_5 в качестве группы движений дефекта $\delta=1$. При произвольной функции $a(x^1)$ тензор кривизны отличен от нуля; например, $R^4_{141}=\frac{3}{2}\left(\frac{da}{dx^1}+a^2\right)$.

Метрика Шварцшильда дает пример особого инвариантного решения типа [0, 2 (2)], способ получения которого несколько отличается от описанного в § 4.3 общего алгоритма построения неособых инвариантных решений. В качестве группы изометрий выбирается группа G_3 трехмерных вращений. Операторы $X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ этой группы удобно записать в сферических координатах (9.25) в виде

$$X_1=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad X_2=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$X_3=\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{9.32}$$

Формулы продолжения (6.24) дают:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1=X_1&+y_{r\varphi}\sin^{-2}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y_{r\theta}}-\\&-(y_{r\theta}\cos\varphi-y_{r\varphi}\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{r\varphi}}+2y_{\theta\varphi}\sin^{-2}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y_{\theta\theta}}+\\&+(-y_{\theta\theta}\cos\varphi+y_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi+y_{\varphi\varphi}\sin^{-2}\theta\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\theta\varphi}}-\\&-2(y_{\theta\varphi}\cos\varphi-y_{\varphi\varphi}\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\varphi\varphi}}+y_{\varphi t}\sin^{-2}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y_{\theta t}}-\\&-(y_{\theta t}\cos\varphi-y_{\varphi t}\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\varphi t}},\end{aligned}$$

$$\tilde{X}_2 = X_2 - y_{r\varphi} \sin^{-2}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y_{r\theta}} +$$
$$+ (y_{r\theta} \sin\varphi + y_{r\varphi} \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi) \frac{\partial}{\partial y_{r\varphi}} - 2y_{\theta\varphi} \sin^{-2}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y_{\theta\theta}} +$$
$$+ (y_{\theta\theta} \sin\varphi + y_{\theta\varphi} \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi - y_{\varphi\varphi} \sin^{-2}\theta \sin\varphi) \frac{\partial}{\partial y_{\theta\varphi}} +$$
$$+ 2(y_{\theta\varphi} \sin\varphi + y_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi) \frac{\partial}{\partial y_{\varphi\varphi}} - y_{\varphi t} \sin^{-2}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y_{\theta t}} +$$
$$+ (y_{\theta t} \sin\varphi + y_{\varphi t} \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi) \frac{\partial}{\partial y_{\varphi t}},$$

$\tilde{X}_3 = X_3$.

Для этих операторов $r_*(\xi) = 2$, $r_*(\xi, \eta) = 3$, так что условие существования неособых инвариантных решений, имеющее вид $r_*(\xi) = r_*(\xi, \eta)$ (см. сноску в § 4.3), в данном случае не выполнено. Поэтому нужно рассматривать особые инвариантные решения, на которых в соответствии с определением особого инвариантного многообразия (Эйзенхарт [1], § 19) должно выполняться условие $r_*(\xi, \eta) < 3$. Для этого нужно приравнять нулю все миноры третьего порядка матрицы, составленной из коэффициентов операторов X_i $(i = 1, 2, 3)$. Из вида оператора X_3 ясно, что достаточно приравнять нулю миноры второго порядка матрицы, составленной из коэффициентов $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ с исключением коэффициентов при $\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Например, условие

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi & y_{r\varphi} \sin^{-2}\theta \cos\varphi \\ \cos\varphi & -y_{r\varphi} \sin^{-2}\theta \sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

дает $y_{r\varphi} = 0$. Аналогично получаются остальные равенства следующих условий:

$$y_{r\theta} = y_{r\varphi} = y_{\theta\varphi} = y_{\theta t} = y_{\varphi t} = 0. \tag{9.33}$$

Из оставшегося уравнения

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi & (-y_{\theta\theta} + y_{\varphi\varphi} \sin^{-2}\theta) \cos\varphi \\ \cos\varphi & (y_{\theta\theta} - y_{\varphi\varphi} \sin^{-2}\theta) \sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

следует равенство

$$y_{\varphi\varphi} = y_{\theta\theta} \sin^2\theta. \tag{9.34}$$

В силу формул (9.33), (9.34) многообразие (9.21) записывается в виде

$$y_{rr} = A, \quad y_{\theta\theta} = B, \quad y_{\varphi\varphi} = B \sin^2\theta, \quad y_{tt} = C, \quad y_{rt} = D \tag{9.35}$$

с произвольными функциями A, B, C, D от r, θ, φ, t. Из условия инвариантности (3.21) многообразия (9.35) относительно группы $\tilde{G}_3$ следует, что функции A, B, C, D зависят только от r и t.

Например, уравнения

$$\tilde{X}_1(y_{rr}-A)=-\sin\varphi\frac{\partial A}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0,$$

$$\tilde{X}_3(y_{rr}-A)=-\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0$$

дают $\frac{\partial A}{\partial\theta}=\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0$. Полученный общий вид инвариантного решения совпадает с центрально-симметрической метрикой (9.24).

Решения, имеющие ранг $\rho=2$, представляют интерес с точки зрения теории солитонов и обсуждаются в работах: Harrison [1], Neugebauer [1], Neugebauer & Kramer [1], Maison [1, 2], Белинский, Захаров [1], Алексеев, Белинский [1], Cosgrove [1].

§ 10. Конформно-инвариантные уравнения второго порядка

10.1. Предварительные рассмотрения. Известно, что изучение линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$g^{ij}(x)u_{ij}+b^i(x)u_i+c(x)u=0,$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, удобно вести в терминах риманова пространства V_n, метрика которого определяется старшими коэффициентами g^{ij} (Адамар [1], Овсянников [2]). При таком геометрическом подходе к уравнениям второго порядка естественно записывать их в ковариантной форме

$$g^{ij}u_{,ij}+a^iu_i+cu=0,\quad a^i=b^i+g^{jk}\Gamma^i_{jk},$$

или

$$L[u]\equiv\Delta_2u+a^iu_i+cu=0, \tag{10.1}$$

где Δ_2u — дифференциальный параметр Бельтрами второго рода (6.17) в римановом пространстве V_n с метрикой (6.4). Этот геометрический подход эффективен также при исследовании групповых свойств более общих полулинейных уравнений (Ибрагимов [4]):

$$F[u]\equiv\Delta_2u+a^iu_i+\psi(x,\ u)=0. \tag{10.2}$$

Этот параграф посвящен в основном изучению уравнений (10.1) и (10.2), инвариантных относительно групп конформных движений в пространстве V_n. В следующей главе будут рассмотрены дополнительные свойства линейных конформно-инвариантных уравнений, связанные с принципом Гюйгенса. Краткие сведения о линейных уравнениях с максимальной группой изометрий из § 10.5 также используются при обсуждении принципа Гюйгенса.

Инфинитезимальный оператор

$$X=\xi^i(x,\ u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta(x,\ u)\frac{\partial}{\partial u}$$