Например, уравнения

$$\tilde{X}_1(y_{rr}-A)=-\sin\varphi\frac{\partial A}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0,$$

$$\tilde{X}_3(y_{rr}-A)=-\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0$$

дают $\frac{\partial A}{\partial\theta}=\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0$. Полученный общий вид инвариантного решения совпадает с центрально-симметрической метрикой (9.24).

Решения, имеющие ранг $\rho=2$, представляют интерес с точки зрения теории солитонов и обсуждаются в работах: Harrison [1], Neugebauer [1], Neugebauer & Kramer [1], Maison [1, 2], Белинский, Захаров [1], Алексеев, Белинский [1], Cosgrove [1].

## § 10. Конформно-инвариантные уравнения второго порядка

**10.1. Предварительные рассмотрения.** Известно, что изучение линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$g^{ij}(x)u_{ij}+b^i(x)u_i+c(x)u=0,$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, удобно вести в терминах риманова пространства $V_n$, метрика которого определяется старшими коэффициентами $g^{ij}$ (Адамар [1], Овсянников [2]). При таком геометрическом подходе к уравнениям второго порядка естественно записывать их в ковариантной форме

$$g^{ij}u_{,ij}+a^iu_i+cu=0,\quad a^i=b^i+g^{jk}\Gamma^i_{jk},$$

или

$$L[u]\equiv\Delta_2u+a^iu_i+cu=0, \tag{10.1}$$

где $\Delta_2u$ — дифференциальный параметр Бельтрами второго рода (6.17) в римановом пространстве $V_n$ с метрикой (6.4). Этот геометрический подход эффективен также при исследовании групповых свойств более общих полулинейных уравнений (Ибрагимов [4]):

$$F[u]\equiv\Delta_2u+a^iu_i+\psi(x,\ u)=0. \tag{10.2}$$

Этот параграф посвящен в основном изучению уравнений (10.1) и (10.2), инвариантных относительно групп конформных движений в пространстве $V_n$. В следующей главе будут рассмотрены дополнительные свойства линейных конформно-инвариантных уравнений, связанные с принципом Гюйгенса. Краткие сведения о линейных уравнениях с максимальной группой изометрий из § 10.5 также используются при обсуждении принципа Гюйгенса.

Инфинитезимальный оператор

$$X=\xi^i(x,\ u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta(x,\ u)\frac{\partial}{\partial u}$$

группы, допускаемой уравнением (10.2), удовлетворяет условию

$$\underset{2}{X}F[u]=\lambda F[u], \tag{10.3}$$

где $\lambda=\lambda\left(x, u, \underset{1}{u}\right)$ — вообще говоря, произвольная функция. Так же, как и в случае линейных уравнений, доказывается, что

$$\lambda=\lambda(x, u), \quad \xi^i=\xi^i(x), \quad \eta=\sigma(x)u+\tau(x). \tag{10.4}$$

Поэтому в определяющее уравнение (10.3) нужно подставить оператор

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+[\sigma(x)u+\tau(x)]\frac{\partial}{\partial u}. \tag{10.5}$$

Формулы продолжения (4.8), (4.10) дают

$$\underset{1}{X}=X+\zeta_i\frac{\partial}{\partial u_i}, \quad \zeta_i=\sigma u_i-u_k\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}+u\sigma_i+\tau_i;$$

$$\underset{2}{X}=\underset{1}{X}+\zeta_{ij}\frac{\partial}{\partial u_{ij}}, \quad \zeta_{ij}=\sigma u_{ij}-\left(u_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}+u_{jk}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}\right)+$$
$$+u_i\sigma_j+u_j\sigma_i-u_k\frac{\partial^2\xi^k}{\partial x^i\partial x^j}+u\sigma_{ij}+\tau_{ij}.$$

После подстановки полученных выражений для координат оператора $\underset{2}{X}$ и приведения подобных членов уравнение (10.3) приводится к виду

$$\left(\xi^k\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}-g^{ik}\frac{\partial\xi^j}{\partial x^k}-g^{jk}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}+\sigma g^{ij}\right)u_{ij}+$$
$$+\left(2g^{ij}\sigma_j-g^{jk}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^k}-b^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+\sigma b^i+\xi^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j}\right)u_i+$$
$$+(g^{ij}\sigma_{ij}+b^i\sigma_i)u+X\psi+g^{ij}\tau_{ij}+b^i\tau_i=\lambda g^{ij}u_{ij}+\lambda b^iu_i+\lambda\psi,$$

где

$$b^i=a^i-g^{jk}\Gamma^i_{jk}.$$

Так как введение множителя $\lambda$ в определяющее уравнение позволяет считать все переменные $x^i$, $u$, $u_i$, $u_{ij}$ $(i\leqslant j)$ независимыми, то полученное равенство эквивалентно системе уравнений

$$\xi^k\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}-g^{ik}\frac{\partial\xi^j}{\partial x^k}-g^{jk}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}+\sigma g^{ij}=\lambda g^{ij}, \tag{10.6}$$

$$2g^{ij}\sigma_j-g^{jk}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^k}-b^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+\sigma b^i+\xi^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j}=\lambda b^i, \tag{10.7}$$

$$(g^{ij}\sigma_{ij}+b^i\sigma_i)u+X\psi+g^{ij}\tau_{ij}+b^i\tau_i=\lambda\psi. \tag{10.8}$$

Из (10.6) сразу следует, что $\lambda=\lambda(x)$. Используя обозначения,

$$\mu=\sigma-\lambda, \quad a_i=g_{ij}a^j, \quad K_{ij}=a_{i,j}-a_{j,i},$$

уравнения (10.6), (10.7) можно записать в ковариантной форме:

$$\mathfrak{L} g_{ij} = \mu g_{ij}, \tag{10.9}$$

$$\sigma_i = \frac{2-n}{4}\mu_i - \frac{1}{2}(a_j\xi^j)_i - \frac{1}{2}K_{ij}\xi^j. \tag{10.10}$$

Условия совместности уравнений (10.10)

$$\sigma_{,ij} = \sigma_{,ji}$$

дают дополнительную систему уравнений

$$(K_{il}\xi^l)_{,j} - (K_{jl}\xi^l)_{,i} = 0. \tag{10.11}$$

Воспользовавшись тождеством

$$\Delta_2 u + a^i\sigma_i \equiv \xi^i E_i + \mu E,$$

где $E = -\frac{1}{2}\left(a^i_{,i} + \frac{1}{2}a^i a_i + \frac{n-2}{2(n-1)}R\right)$, $R$ —скалярная кривизна пространства $V_n$, (10.8) можно переписать в виде

$$(\xi^i E_i + \mu E)u + (X + \mu - \sigma)\psi + \Delta_2\tau + a^i\tau_i = 0. \tag{10.12}$$

Условия (10.9)—(10.12) образуют систему определяющих уравнений группы, допускаемой уравнением (10.2).

Пусть $G$—группа преобразований в пространстве переменных $(x, u)$ с оператором (10.5), а $G_x$—ее сужение на переменные $x$, определяемое «усеченным» оператором

$$X_x = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{10.13}$$

Если $G$ допускается уравнением (10.2), то инфинитезимальные операторы (10.13) удовлетворяют обобщенным уравнениям Киллинга (10.9) и, кроме того, некоторым дополнительным условиям (10.11) и (10.12). Таким образом, как и в случае линейных уравнений (Овсянников [2], § 28.2), справедлива следующая теорема (Ибрагимов [11]).

Теорема. *Сужение $G_x$ группы $G$, допускаемой уравнением* (10.2), *является подгруппой группы конформных движений в пространстве $V_n$.*

Определение. Уравнение (10.2) называется *конформно-инвариантным*, если оно допускает группу $G$, сужение $G_x$ которой совпадает с максимальной группой конформных движений в $V_n$.

Пусть старшие коэффициенты двух уравнений вида (10.2) удовлетворяют условиям разрешимости системы (6.2). Тогда этим уравнениям соответствует одно и то же $V_n$, и о них можно говорить как об уравнениях в римановом пространстве $V_n$. Уравнения (10.2) рассматриваются с точностью до замены координат

$$x'^i = f^i(x) \tag{10.14a}$$

в $V_n$, преобразований

$$u' = \alpha(x)\,u + \beta(x), \quad \alpha(x) \neq 0, \tag{10.14b}$$

переводящих $V_n$ в конформное ему пространство, и

$$F'[u] = e^{-\nu(x)} F[ue^{\nu(x)}]. \tag{10.14c}$$

Уравнения, получающиеся друг из друга указанными преобразованиями, называются эквивалентными. В каждом пространстве $V_n$ имеется по крайней мере одно конформно-инвариантное уравнение вида (10.1). В качестве него можно взять

$$\Delta u \equiv \Delta_2 u + \frac{n-2}{4(n-1)} Ru = 0. \tag{10.15}$$

Если $V_n$ обладает достаточно широкой группой конформных движений, то, как будет показано ниже, (10.15) является единственным линейным конформно-инвариантным уравнением в $V_n$.

**10.2. Линейные уравнения в $S_n$.** Согласно теоремам 10.1 и 8.3 порядок группы, допускаемой уравнением вида (10.2), не превосходит числа $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, причем это значение достигается только для конформно-инвариантных уравнений в конформно-плоских пространствах $V_n$. Переход к конформному пространству с помощью преобразования (10.14b) позволяет ограничиться при этом рассмотрением плоского пространства $S_n$, а формальная замена вещественных координат на комплексные, использовавшаяся в § 8.3, — считать, что метрика пространства $S_n$ положительно определена. Таким образом, для нахождения всех уравнений (10.2), допускающих группу максимального порядка $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, достаточно рассмотреть уравнения вида

$$\Delta u + a^i(x)\,u_i + \psi(x, u) = 0, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{ii}. \tag{10.16}$$

Группа, допускаемая линейным уравнением (10.1), содержит инвариантную подгруппу, порожденную операторами $X_0 = u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_\tau = \tau(x)\frac{\partial}{\partial u}$, где $\tau(x)$ — решение уравнения (10.1). Беря фактор-группу по этой инвариантной подгруппе, операторы (10.5), допускаемые линейным уравнением, можно записать в виде

$$X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sigma(x)\,u, \tag{10.17}$$

причем функция $\sigma$ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Определяющие уравнения в этом случае претерпевают небольшие изменения: уравнения (10.9), (10.10) и (10.11) остаются прежними, а (10.12) принимает вид

$$\xi^i H_i + \mu H = 0, \tag{10.18}$$

где $H$ — *инвариант Коттона* (Cotton [1]):

$$H \equiv E + c = -\frac{1}{2} a^i_{,i} - \frac{1}{4} a^i a_i - \frac{n-2}{4(n-1)} R + c. \qquad (10.19)$$

Вопрос о линейных уравнениях с группой максимального порядка решает следующая теорема (Ибрагимов [4]).

Теорема. *Всякое конформно-инвариантное уравнение* (10.1) *в* $S_n$ *приводится к уравнению Лапласа*

$$\Delta u = 0 \qquad (10.20)$$

*преобразованиями* (10.14a), (10.14c). *Уравнение Лапласа инвариантно относительно* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$*-параметрической группы, порожденной операторами*

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j},$$
$$Y_i = (2x^i x^j - |x|^2 \delta^{ij}) \frac{\partial}{\partial x^j} + (2-n) x^i u \frac{\partial}{\partial u}, \qquad (10.21)$$
$$Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{2-n}{2} u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Доказательство. Среди уравнений

$$\Delta u + a^i(x) u_i + c(x) u = 0 \qquad (10.22)$$

нужно выделить все конформно-инвариантные. Уравнения (10.9) в этом случае совпадают с (8.23), и их общее решение (8.24) дает операторы (8.25). Подстановка функций $\xi^i$ из (8.24) в уравнения (10.11), (10.18) дает переопределенную систему уравнений для коэффициентов $a^i$ и $c$.

Так как

$$(K_{il}\xi^l)_{,j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(K_{il}\xi^l) - K_{pl}\xi^l \Gamma^p_{ij}$$

и справедливы тождества

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial K_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial K_{li}}{\partial x^j} = 0,$$

то уравнения (10.11) можно переписать в виде

$$\mathfrak{L} K_{ij} \equiv \xi^l \frac{\partial K_{ij}}{\partial x^l} + K_{lj} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + K_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} = 0. \qquad (10.11')$$

Эти уравнения, записанные для операторов $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, дают $K_{ij} = \mathrm{const}$, и ввиду этого подстановка в (10.11′) координат $\xi^i = x^i$ оператора растяжения $Z$ из (8.25) приводит к условию

$$K_{ij} = 0. \qquad (10.23)$$

Поэтому

$$a_i = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i}.$$

Так как под действием (10.14c) величины $a_i$ преобразуются по формуле $a_i' = a_i + 2\gamma_i$, то это преобразование эквивалентности с $\gamma = -\frac{1}{2}\varphi$ дает $a_i' = 0$. Поэтому в уравнении (10.22) можно положить $a^i = 0$.

Подстановка тех же операторов $X_i$ (для них $\mu = 0$) и $Z$ (для него $\mu \neq 0$) в уравнение (10.18) дает $H = 0$. Так как для уравнения (10.22) при $a^i = 0$ $H = c(x)$, то этим доказана первая часть теоремы.

Для нахождения операторов (10.17), допускаемых уравнением Лапласа, достаточно решить уравнения (10.10) для функции $\sigma$. Для операторов $X_i$, $X_{ij}$ и $Z$ из (8.25) $\mu = \text{const}$, и поэтому $\sigma = \text{const}$. Эту постоянную можно выбрать произвольно, так как функция $\sigma(x)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Удобно взять $\sigma = 0$ для операторов переноса и вращения и $\sigma = \frac{2-n}{2}$ для оператора растяжения. Для операторов $Y_i$ уравнения (10.9) дают $\mu = 4x^i$, поэтому $\sigma = (2-n)x^i + \text{const}$.

**10.3. Полулинейные уравнения в $S_n$.** Предыдущая теорема переносится также на полулинейные уравнения.

Теорема. *Уравнение* (10.16) *конформно-инвариантно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно уравнению*

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ii} + a u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \quad a = \text{const}. \tag{10.24}$$

*Это уравнение допускает группу с операторами* (10.21).

Доказательство. Так как рассуждения, приводящие к равенствам (10.23), и в этом случае остаются в силе, то достаточно рассмотреть уравнение

$$\Delta u + \psi(x, u) = 0. \tag{10.25}$$

Равенство (10.12) для (10.25) имеет вид

$$\xi^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + (\sigma u + \tau)\frac{\partial \psi}{\partial u} + (\mu - \sigma)\psi + \Delta\tau = 0, \tag{10.12'}$$

а уравнения (10.9) и (10.10) дают следующий общий вид операторов (10.5) (операторы вращения пока не используются):

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + (\sigma^i u + \tau^i)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_i = (2x^i x^k - |x|^2 \delta^{ik})\frac{\partial}{\partial x^k} + [(\sigma^{n+i} + (2-n)x^i)u + \tau^{n+i}]\frac{\partial}{\partial u}, \tag{10.26}$$

$$Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (\sigma^0 u + \tau^0)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $\sigma^\nu$ ($\nu=0, 1, \ldots, 2n$) — произвольные постоянные, а $\tau^\nu$ — произвольные функции от $x$.

Подстановка операторов (10.26) в уравнение (10.12′) дает

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+(\sigma^i u+\tau^i)\frac{\partial\psi}{\partial u}-\sigma^i\psi+\Delta\tau^i=0, \tag{10.27}$$

$$x^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+(\sigma^0 u+\tau^0)\frac{\partial\psi}{\partial u}+(2-\sigma^0)\psi+\Delta\tau^0=0, \tag{10.28}$$

$$(2x^ix^j-|x|^2\delta^{ij})\frac{\partial\psi}{\partial x^j}+[(\sigma^{n+i}+(2-n)x^i)u+\tau^{n+i}]\frac{\partial\psi}{\partial u}+$$
$$+[(2+n)x^i-\sigma^{n+i}]\psi+\Delta\tau^{n+i}=0 \quad (i=1, \ldots, n). \tag{10.29}$$

Уравнение (10.28), используя равенства (10.27), можно заменить на

$$\left[\sum_{i=1}^n x^i(\sigma^i u+\tau^i)-\sigma^0 u-\tau^0\right]\frac{\partial\psi}{\partial u}+\left(\sigma^0-2-\sum_{i=1}^n x^i\sigma^i\right)\psi+$$
$$+\sum_{i=1}^n x^i\Delta\tau^i-\Delta\tau^0=0. \tag{10.30}$$

Кроме того, (10.28) и (10.27) дают

$$(2x^ix^j-|x|^2\delta^{ij})\frac{\partial\psi}{\partial x^j}=[|x|^2(\sigma^i u+\tau^i)-2x^i(\sigma^0 u+\tau^0)]\frac{\partial\psi}{\partial u}+$$
$$+(2x^i(\sigma^0-2)-|x|^2\sigma^i)\psi+|x|^2\Delta\tau^i-2x^i\Delta\tau^0,$$

и равенства (10.29) заменяются на

$$[(|x|^2\sigma^i+(2-n-2\sigma^0)x^i+\sigma^{n+i})u+|x|^2\tau^i-2\tau^0x^i+\tau^{n+i}]\frac{\partial\psi}{\partial u}-$$
$$-(|x|^2\sigma^i+(2-n-2\sigma^0)x^i+\sigma^{n+i})\psi+|x|^2\Delta\tau^i-2x^i\Delta\tau^0+\Delta\tau^{n+i}=0. \tag{10.31}$$

Уравнения (10.30) и (10.31) удобно записать в виде

$$A\frac{\partial\psi}{\partial u}-(p+2)\psi+B=0, \tag{10.30′}$$

$$A^i\frac{\partial\psi}{\partial u}-p^i\psi+B^i=0 \quad (i=1, \ldots, n), \tag{10.31′}$$

где

$$A=pu+q, \quad A^i=p^iu+q^i, \tag{10.32}$$
$$B=\sum_{i=1}^n x^i\Delta\tau^i-\Delta\tau^0, \quad B^i=|x|^2\Delta\tau^i-2x^i\Delta\tau^0+\Delta\tau^{n+i};$$

$$p=\sum_{i=1}^n x^i\sigma^i-\sigma^0, \quad p^i=|x|^2\sigma^i+(2-n-2\sigma^0)x^i+\sigma^{n+i}, \tag{10.33}$$
$$q=\sum_{i=1}^n x^i\tau^i-\tau^0, \quad q^i=|x|^2\tau^i-2x^i\tau^0+\tau^{n+i}.$$

Можно считать $A \neq 0$, так как при $A=0$ уравнение (10.25) линейно. Действительно, если $A=0$, то из (10.32) и (10.30) следует $\psi = \frac{1}{2} B(x)$.

Удобно отдельно рассмотреть случаи, когда

1° $A^i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$,

2° $A^i \neq 0$ хотя бы для одного значения $i$.

В случае 1° согласно формулам (10.32) и уравнениям (10.31) выполняются равенства

$$p^i = 0, \quad q^i = 0, \quad B^i = 0,$$

или

$$|x|^2 \sigma^i + (2 - n - 2\sigma^0) x^i + \sigma^{n+i} = 0, \tag{10.34}$$

$$|x|^2 \tau^i - 2x^i \tau^0 + \tau^{n+i} = 0, \tag{10.35}$$

$$|x|^2 \Delta\tau^i - 2x^i \Delta\tau^0 + \Delta\tau^{n+i} = 0. \tag{10.36}$$

Так как $\sigma^\nu = \text{const}$, уравнения (10.34) дают

$$\sigma^0 = \frac{2-n}{2}, \quad \sigma^i = 0, \quad \sigma^{n+i} = 0. \tag{10.37}$$

Поэтому (10.27) и (10.30′) принимают вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = -\frac{1}{A}\left(\frac{n+2}{2}\psi - B\right)\tau^i - \Delta\tau^i, \tag{10.38}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{1}{A}\left(\frac{n+2}{2}\psi - B\right). \tag{10.39}$$

Из условий совместности уравнений (10.38) и (10.39):

$$\left(\frac{n+2}{2}\psi - B\right)\left(\frac{n-2}{2}\tau^i + \frac{\partial q}{\partial x_i}\right) + A\left(\frac{n+2}{2}\Delta\tau^i + \frac{\partial B}{\partial x^i}\right) = 0$$

в случае нелинейной функции $\psi(x, u)$ получаются уравнения

$$\frac{n-2}{2}\tau^i + \frac{\partial q}{\partial x^i} = 0 \tag{10.40}$$

и

$$\frac{n+2}{2}\Delta\tau^i + \frac{\partial B}{\partial x^i} = 0$$

для функции $\tau^i$. Введя обозначение

$$\varphi = \frac{2}{2-n} q, \tag{10.41}$$

уравнения (10.40) можно записать в виде

$$\tau^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \tag{10.42}$$

Уравнения (10.41) и (10.42) дают

$$\Delta\varphi = \frac{2}{2-n}(2\Delta\varphi + x^i\Delta\tau^i - \Delta\tau^0),$$

откуда

$$x^i\Delta\tau^i - \Delta\tau^0 = -\frac{n+2}{2}\Delta\varphi.$$

Уравнение (10.39) принимает теперь вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{n+2}{n-2}\frac{\psi+\Delta\varphi}{u-\varphi},$$

общее решение которого дается формулой

$$\psi = a(x)(u-\varphi)^{\frac{n+2}{n-2}} - \Delta\varphi, \tag{10.43}$$

где $a(x)$ — произвольная функция. Подстановка формулы (10.43) в уравнения (10.38) дает

$$(u-\varphi)^{\frac{n+2}{n-2}} \cdot \frac{\partial a}{\partial x^i} = 0,$$

откуда $a = \text{const}$. Таким образом, в случае 1° конформно-инвариантное уравнение (10.24) эквивалентно уравнению

$$\Delta u + a(u-\varphi)^{\frac{n+2}{n-2}} - \Delta\varphi = 0$$

с произвольной функцией $\varphi(x)$ и $a = \text{const}$. Это уравнение преобразованием эквивалентности $u' = u - \varphi$ приводится к виду (10.24). Нетрудно проверить, что уравнение (10.24) допускает группу с операторами (10.21).

В случае 2° для определенности можно предположить $A^1 \neq 0$. Исключение $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ из уравнений (10.30′) и (10.31′) при $i = 1$ дает

$$(A^1(p+2) - Ap^1)\psi + AB^1 - BA^1 = 0.$$

Из этого уравнения после дифференцирования по $u$ с использованием (10.30′) и (10.31′) при $i = 1$ следует, что

$$p^1\psi - B^1 = 0.$$

Поэтому уравнение (10.31′) дает $\psi = \psi(x)$. Следовательно, случай 2° приводит только к линейной функции $\psi$.

**10.4. Уравнения с группой изометрий максимального порядка.** Аналогично предыдущему можно описать все уравнения вида (10.2), инвариантные относительно группы изометрий в пространствах постоянной кривизны, и доказать следующее утверждение (Ибрагимов [4]).

Теорема. *Уравнение* (10.2) *в пространстве* $V_n$ *постоянной кривизны инвариантно относительно группы изометрических движений в* $V_n$ *тогда и только тогда, когда оно преобразованиями эквивалентности приводится к виду*

$$\Delta u + \varphi(u) = 0, \tag{10.44}$$

*где оператор* $\Delta$ *определяется формулой* (10.15), *а* $\varphi$ — *произвольная функция.*

Эта теорема дает, в частности, описание всех линейных уравнений (10.1), инвариантных относительно группы изометрий максимального порядка $\frac{1}{2}n(n+1)$. Они имеют вид

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad \lambda = \text{const}. \tag{10.45}$$

Если использовать риманову форму (8.14) метрики пространства $V_n$ постоянной кривизны $K$, то уравнение (10.45) конкретизируется в виде уравнения (Овсянников [2])

$$\theta^2 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_{ii} + \lambda u = 0. \tag{10.46}$$

Переход к системе координат, приводящей метрику в $V_n$ к форме (8.15), дает эквивалентное уравнение

$$|K|(x^{i_0})^2 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i u_{ii} + \lambda u = 0. \tag{10.47}$$

**10.5. Волновое уравнение в лоренцевых пространствах.** Согласно теореме 10.2 уравнение (10.15) является единственным (с точностью до преобразований эквивалентности (10.14)) линейным конформно-инвариантным уравнением в конформно-плоских пространствах $V_n$. В пространствах с тривиальной конформной группой подобное утверждение о единственности неверно. Действительно, пусть $V_n$ — пространство с тривиальной конформной группой и $\tilde{V}_n$ — конформное ему пространство, в котором группы изометрий и конформных движений совпадают. Уравнение

$$\tilde{\Delta} u + \lambda u = 0, \tag{10.48}$$

где $\tilde{\Delta} u$ определяется формулой (10.15) в пространстве $\tilde{V}_n$, а $\lambda$ — произвольная постоянная, конформно-инвариантно в $\tilde{V}_n$. Это следует из того, что $K_{ij} = 0$, $H = \lambda = \text{const}$, $\mu = 0$, и поэтому уравнения (10.11), (10.18) выполнены. Соответствующее уравнение в $V_n$, полученное из (10.48) преобразованиями (10.14), конформно-инвариантно и при $\lambda \neq 0$ удовлетворяет условию $H \neq 0$. Это означает, что полученное уравнение не эквивалентно (10.15), так как для уравнения (10.15) $H = 0$, а при преобразованиях экви-

валентности (10.14) величина $H$ может только умножаться на функцию, отличную от нуля.

В соответствии с § 8.4 теорему 10.2 можно рассматривать как утверждение о единственности конформно-инвариантного уравнения в пространствах $V_n$ с определенной метрикой, имеющих нетривиальную группу конформных движений. В такой формулировке это утверждение переносится на лоренцевы пространства с нетривиальной конформной группой (Ибрагимов [11]).

Теорема. *В лоренцевом пространстве $V_n$, $n \geqslant 4$, с нетривиальной группой конформных движений линейное уравнение* (10.1) *конформно-инвариантно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно уравнению* (10.15).

Доказательство. Достаточно показать, что линейные конформно-инвариантные уравнения в лоренцевых пространствах $V_n$ с нетривиальной конформной группой удовлетворяют условиям

$$K_{ij}=0, \quad H=0. \tag{10.49}$$

Теорема доказывается одинаково для любой размерности $n$, поэтому можно ограничиться случаем $n=4$ и в соответствии с теоремой 8.5 рассмотреть уравнения (10.1) со старшими коэффициентами (8.32).

Из операторов (8.31) группы конформных движений в $V_4$ здесь будут использоваться только $X_l$ $(l=1, 2, 3)$ и $Z$. Удобно перейти к координатам

$$x'^1=x^1+x^0, \quad x'^2=x^2, \quad x'^3=x^3, \quad x'^4=x^1-x^0$$

и записать эти операторы в виде

$$X_l=\frac{\partial}{\partial x'^l}, \quad Z=2x'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}+x'^2\frac{\partial}{\partial x'^2}+x'^3\frac{\partial}{\partial x'^3}.$$

Подстановка координат операторов $X_l$ в (10.11) дает $K_{ij}=K_{ij}(x'^4)$, после чего уравнение (10.11) для оператора $Z$ принимает вид

$$2(K_{1j}\delta_i^1+K_{i1}\delta_j^1)+\sum_{\alpha=2}^{3}(K_{\alpha j}\delta_i^\alpha+K_{i\alpha}\delta_j^\alpha)=0,$$

или

$$2K_{ij}+K_{1j}\delta_i^1+K_{i1}\delta_j^1-K_{4j}\delta_i^4-K_{i4}\delta_j^4=0.$$

Отсюда следует, что $K_{ij}=0$. Уравнение (10.18), записанное для операторов $X_l$ (для них из (10.9) следует $\mu=0$), дает $H=H(x'^4)$. Поэтому (10.18) для оператора $Z$ принимает вид $\mu H=0$, откуда $H=0$, так как $\mu\neq 0$ для $Z$. Следовательно, условия (10.49) выполнены и теорема доказана.

Для изучения конформно-инвариантных уравнений полезна следующая формула перехода от операторов $\Delta$ в $V_n$ к соответствующему оператору $\tilde{\Delta}$ в конформном к $V_n$ пространстве $\tilde{V}_n$. Если $g_{ij}(x)$ и

$\tilde{g}_{ij}(x)=e^{2\sigma(x)}g_{ij}(x)$ — метрические тензоры пространств $V_n$ и $\tilde{V}_n$ соответственно, то

$$\tilde{\Delta}u=e^{-\frac{n+2}{2}\sigma}\Delta\left(ue^{\frac{n-2}{2}\sigma}\right). \tag{10.50}$$

Действительно,

$$e^{-\frac{n+2}{2}\sigma}\Delta\left(ue^{\frac{n-2}{2}\sigma}\right)=e^{-\frac{n+2}{2}\sigma}g^{ij}\left(ue^{\frac{n-2}{2}\sigma}\right)_{,ij}+\frac{n-2}{4(n-1)}e^{-2\sigma}Ru=$$
$$=e^{-2\sigma}g^{ij}\left[u_{ij}+(n-2)u_i\sigma_j+\frac{1}{2}(n-2)u\sigma_{ij}+\frac{1}{4}(n-2)^2u\sigma_i\sigma_j-\right.$$
$$\left.-\Gamma^k_{ij}u_k-\frac{1}{2}(n-2)u\Gamma^k_{ij}\sigma_k\right]+\frac{n-2}{4(n-1)}e^{-2\sigma}Ru.$$

С помощью формул (8.2) правая часть этого равенства переписывается в виде

$$\tilde{g}^{ij}\left[u_{ij}-\tilde{\Gamma}^k_{ij}u_k+nu_i\sigma_j-\tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{kl}u_k\sigma_l+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(n-2)u\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(n-2)\sigma_i\sigma_j-\tilde{\Gamma}^k_{ij}\sigma_k+2\sigma_i\sigma_j-\tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{kl}\sigma_l\sigma_k\right)\right]+$$
$$+\frac{n-2}{4(n-1)}\left[\tilde{R}-2(n-1)\tilde{g}^{ij}(\sigma_{ij}-\tilde{\Gamma}^k_{ij}\sigma_k)+(n-1)(n-2)\tilde{g}^{ij}\sigma_i\sigma_j\right]u.$$

Так как это выражение равно

$$\tilde{g}^{ij}(u_{ij}-\tilde{\Gamma}^k_{ij}u_k)+\frac{n-2}{4(n-1)}\tilde{R}u\equiv\tilde{\Delta}u,$$

то равенство (10.50) доказано.

Подобно линейному уравнению (10.15) обобщение

$$\Delta_{(a)}u\equiv g^{ij}u_{,ij}+\frac{n-2}{4(n-1)}Ru+au^{\frac{n+2}{n-2}}=0,\quad a=\text{const}, \tag{10.51}$$

нелинейного уравнения (10.24) на произвольное риманово пространство конформно-инвариантно для любого пространства $V_n$. Инфинитезимальные операторы группы, допускаемой уравнением (10.51), имеют вид (10.17) с функцией $\sigma=\frac{2-n}{4}\mu$, где величина $\mu$ определяется из уравнений (10.9). Операторы $\Delta_{(a)}$ в конформных друг другу пространствах связаны также равенством (10.50).

Линейное конформно-инвариантное уравнение (10.15) в пространстве $V_n$ гиперболического типа естественно называть *волновым уравнением* в $V_n$, обобщающим классическое волновое уравнение на произвольные лоренцевы пространства (этот вопрос неоднократно обсуждался с разных точек зрения; см., например, Эддингтон [1], стр. 116, Pauli [1], Penrose [1], Ибрагимов [6]). Теорема 10.5 выделяет уравнение (10.15) по ее алгебро-геометрическим свойствам. Другое важное свойство этого уравнения, связанное с принципом Гюйгенса, подчеркивает его физическое значение.