ГЛАВА 2

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА С ГРУППОВОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

§ 11. *Общие рассмотрения и история вопроса*

11.1. Проблема Адамара. Исторически принцип Гюйгенса возник в связи с задачами оптики. Первоначально сформулированный Христианом Гюйгенсом [1] как геометрический способ построения фронта волны, он служил для объяснения основных свойств распространения света. В своих основополагающих работах, посвященных изучению волновых уравнений, Kirchhoff [1], Beltrami [1, 2], Volterra [1] осветили математические аспекты принципа Гюйгенса. Следует отметить, что долгое время в понятие принципа Гюйгенса вкладывался различный смысл. Окончательную ясность внес Адамар, исследования которого (Hadamard [1—4]) привели к современному пониманию математической природы принципа Гюйгенса и послужили стимулом для дальнейшего развития этого направления.

Здесь принцип Гюйгенса будет отождествляться с утверждением о существовании заднего фронта волны, вызванной локализованным в пространстве и во времени источником (принцип Гюйгенса в «узком смысле» по терминологии Адамара [1], п. 33); в этом случае говорят также о распространении волн без диффузии. Для классического волнового уравнения в трехмерном пространстве принцип Гюйгенса означает, что значение решения произвольной задачи Коши в точке $P=(t, x_0, y_0, z_0)$ определяется значениями начальных данных и их производных только на поверхности сферы в пространстве переменных x, y, z радиуса t с центром в точке (x_0, y_0, z_0); другими словами, решение в точке P зависит от начальных данных только на пересечении начального многообразия $t=0$ с характеристическим конусом, выходящим из точки P. Принцип Гюйгенса справедлив также для волнового уравнения с любым нечетным числом пространственных переменных, не меньшим трех. Это непосредственно следует из формулы Пуассона в случае трех пространственных переменных и представления решения, данного Tedone [1], в общем случае.

Для общего линейного гиперболического уравнения второго порядка

$$L[u] \equiv g^{ij}(x)\, u_{ij} + b^i(x)\, u_i + c(x)\, u = 0 \qquad (11.1)$$

принцип Гюйгенса формулируется так же, как для волного уравнения с заменой характеристического конуса на характеристический коноид. Пусть для уравнения (11.1) с $n+1$ независимыми переменными $x=(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ рассматривается задача Коши:

$$L[u]=0, \quad u|_M=f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_M=g. \tag{11.2}$$

Здесь M — пространственно-подобное многообразие размерности n, называемое *начальным многообразием*, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная в направлении нормали ν к M. Так как в этой главе изучаются только уравнения гиперболического типа, то пространство V_{n+1}, связанное с уравнением (11.1), является лоренцевым. Нужно также иметь в виду, что в дальнейшем изложении речь идет о локальном решении задачи Коши, и поэтому можно ограничиться рассмотрением такой области $U \subset V_{n+1}$, в которой любые две точки соединяются единственной геодезической (в метрике пространства V_{n+1}), полностью лежащей в U. Из теории Адамара [1] следует, что для произвольного уравнения (11.1) решение задачи Коши (11.2) в точке $x_0 \in V_{n+1}$ определяется значениями начальных данных на части M_0 многообразия M, заключенной внутри характеристического коноида с вершиной в точке x_0.

Определение. Если решение задачи Коши (11.2) с произвольными начальными данными зависит в каждой точке x_0 от начальных данных только на пересечении начального многообразия M с характеристическим коноидом с вершиной в точке x_0 (т. е. на границе M_0), то говорят, что *уравнение* (11.1) *удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Задача отыскания всех уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, известна в литературе как *проблема Адамара.* Она до настоящего времени полностью не решена. При исследовании этой задачи наиболее значительных результатов достигли Hadamard [1, 5, 6], Mathisson [1], Ásgeirsson [1], Stellmacher [1, 2], Günther [1, 2].

11.2. Критерий Адамара. Как показал Адамар [1, 5], принцип Гюйгенса не выполняется для уравнений (11.1) при всех четных n и при $n=1$ *). В случае нечетных $n \geqslant 3$ Адамар [1] получил следующий критерий справедливости принципа Гюйгенса в терминах элементарного решения сопряженного к (11.1) уравнения

$$L^*[v] \equiv (g^{ij}v)_{ij} - (b^i v)_i + cv \equiv g^{ij}v_{ij} + b^{*i}v_i + c^*v = 0. \tag{11.3}$$

---

*) Уравнения с двумя независимыми переменными, которые рассмотрел Hornich [1] в качестве уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, имеют особенности на начальном многообразии. Поэтому для них задача Коши с произвольными начальными данными не разрешима и, следовательно, принцип Гюйгенса в указанном выше смысле не выполняется.

Пусть элементарное решение (в смысле Адамара) уравнения (11.3) *при нечетном* $n \geqslant 3$ *с «полюсом» в точке* x_0 *имеет вид*

$$v_0(x) = V(x_0, x)\,\Gamma^{\frac{1-n}{2}} - W(x_0, x)\log\Gamma, \tag{11.4}$$

где $V(x_0, x)$, $W(x_0, x)$ — *аналитические по переменной точке* x *функции,* $\Gamma = \Gamma(x_0, x)$ — *квадрат геодезического расстояния между точками* x_0, $x \in V_{n+1}$. *Для того чтобы уравнение* (11.1) *удовлетворяло принципу Гюйгенса, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$W(x_0, x) = 0 \tag{11.5}$$

для всех точек x_0, x.

Ниже мы применим этот критерий в случае $n = 3$. При этом удобно переписать равенство (11.5) более подробно, используя формулу Адамара [1] (Книга II, глава III)

$$V(x_0, x) = \exp\left[-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\left(L^*[\Gamma] - c^*\Gamma - 8\right)\frac{ds}{s}\Big)\right] \tag{11.6}$$

для коэффициента V в элементарном решении (11.4). Здесь интегрирование ведется вдоль геодезической, соединяющей точки x_0 и x, а $\Gamma(x_0, x)$ рассматривается как функция переменной точки x. Из общей теории Адамара [1] (Книга IV, глава I) следует, что условие (11.5) выполняется тогда и только тогда, когда $V(x_0, x)$ как функция от x удовлетворяет сопряженному уравнению (11.3) для всех точек x, лежащих на характеристическом коноиде с вершиной x_0. Так как этот коноид задается уравнением

$$\Gamma(x_0, x) = 0, \tag{11.7}$$

то критерий Адамара справедливости принципа Гюйгенса для уравнения (11.1) в случае четырех независимых переменных можно записать в виде следующего уравнения для функции (11.6):

$$L^*[V]\big|_{\Gamma(x_0, x) = 0} = 0; \tag{11.8}$$

это уравнение должно выполняться для всех точек x_0 некоторого открытого множества риманова пространства V_4.

11.3. Теорема Матиссона — Асгейрссона. В связи с проблемой Адамара возникает вопрос: существуют ли кроме обычных волновых уравнений с нечетным числом $n \geqslant 3$ пространственных переменных другие гиперболические уравнения вида (11.1), удовлетворяющие принципу Гюйгенса? Первый важный результат в этом направлении получили Mathisson [1] и Ásgeirsson [1] *).

---

*) Хотя Асгейрссон опубликовал свою работу значительно позже, оба автора получили этот результат примерно одновременно; см. об этом Douglis [1] и цитированную работу Асгейрссона.

Они показали, что при $n=3$ в случае уравнений с постоянными старшими коэффициентами g^{ij} на поставленный выше вопрос нужно ответить отрицательно. Учитывая, что преобразования эквивалентности (10.14) не влияют на выполнение принципа Гюйгенса, теорему Матиссона — Асгейрссона можно сформулировать в следующем виде.

Теорема. *Если уравнение* (11.1) *в конформно-плоском пространстве* V_4 *гиперболического типа удовлетворяет принципу Гюйгенса, то оно эквивалентно классическому волновому уравнению*

$$\Box\ u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial \xi^i)^2}\right) u = 0. \tag{11.9}$$

Для доказательства этой теоремы Матиссон использовал приближенное решение — параметрикс Гильберта; задача сводилась при этом к тому, чтобы найти условия, при которых параметрикс является точным решением. Асгейрссон применил другой метод, предложенный Beltrami [1] в связи с обсуждением принципа Гюйгенса для уравнения (11.9). Этот метод использует только специальное свойство линейного дифференциального оператора L, удовлетворяющего принципу Гюйгенса, а не конкретное представление решения. В случае уравнения (11.9) это свойство состоит в том, что волновой оператор $\Box$ удовлетворяет тождеству Бельтрами

$$-\frac{1}{r}\Box = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{x^i - x_0^i}{r^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x^i - x_0^i}{r^3}\right) \tag{11.10}$$

на характеристическом конусе

$$C\colon\ (t-t_0)^2 - r^2 = 0,$$

где

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i - x_0^i)^2, \quad \xi^i = x^i - x_0^i.$$

Это тождество достаточно рассматривать на «нижней» половине

$$C^-\colon\ t - t_0 + r = 0$$

характеристического конуса. После параметризации C^- уравнениями

$$x^i = x_0^i + \xi^i, \quad t = t_0 - \left[\sum_{i=1}^{3} (\xi^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

дифференцирование по ξ^i в правой части (11.10) выполняется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{x^i - x_0^i}{r}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Дивергентный вид правой части тождества (11.10) объясняет выполнение принципа Гюйгенса для волнового уравнения. Кроме того, если применить это тождество к решениям уравнения (11.9), то после интегрирования по части конуса C^-, отсекаемой начальным многообразием, с использованием теоремы Гаусса—Остроградского и стандартного метода выделения сингулярности при вершине конуса получается формула для решения задачи Коши для уравнения (11.9). Обобщая идею Бельтрами, Асгейрссон показал, что тождество типа (11.10) справедливо для любого уравнения (11.1) с $n=2m+1$, удовлетворяющего принципу Гюйгенса. Это тождество имеет вид

$$RL=\sum_{i=1}^{2m+1}\frac{\partial}{\partial\xi^i}A^i \tag{11.11}$$

и выполняется на характеристическом полуконоиде C^- (для рассматриваемого уравнения (11.1)) с некоторой параметризацией $\{\xi^i\}$. Здесь R — линейные дифференциальный оператор порядка $m-1$, а A^i — линейный дифференциальные операторы порядка $\leqslant m$. При этом существование операторов R и A^i, удовлетворяющих указанному тождеству, необходимо, но не достаточно для выполнения принципа Гюйгенса. Так как любое уравнение (11.1) в конформно-плоском пространстве V_4 гиперболического типа с помощью подходящих преобразований эквивалентности (10.14) можно привести к виду

$$\Box u+a^iu_i+cu=0, \tag{11.12}$$

то при доказательстве теоремы достаточно рассмотреть уравнения (11.12) с произвольными переменными коэффициентами a^i, c. Асгейрссон показал, что для существования тождества вида (11.11) коэффициенты уравнения (11.12) должны удовлетворять равенствам (10.49). Это доказывает теорему, так как всякое уравнение (11.12), удовлетворяющее условиям (10.49), эквивалентно волновому уравнению (Cotton [1]; см. также доказательство теоремы 10.2).

Еще одно доказательство теоремы Матиссона—Асгейрссона дал Hadamard [6]. Он исходил из критерия (11.8), который для уравнения (11.12) имеет особенно простой вид ввиду того, что в этом случае квадрат геодезического расстояния является простой квадратичной формой. Нетрудно убедиться, что всякое уравнение (11.12) с помощью некоторого преобразования (10.14c) можно привести к такому уравнению (имеющему, очевидно, также вид (11.12) с преобразованными коэффициентами $\overline{a^i}$, $\overline{c}$), для которого функция $V(x_0, x)$, определенная формулой (11.6), будет равна 1. Подстановка функции

$$V(x_0, x)=1 \tag{11.13}$$

в равенство (11.8) с учетом инвариантности величины H относительно преобразования (10.14c) сразу дает равенство $H=0$ в качестве первого необходимого условия справедливости принципа Гюйгенса для уравнений вида (11.12). Затем из (11.13), (11.6) и (11.8) путем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 получаются равенства $K_{ij}=0$, т. е. все условия (10.49).

11.4. Необходимые условия Гюнтера и Макленагана. Здесь снова рассматриваются уравнения с четырьмя независимыми переменными. Хотя в этом случае критерий Адамара (11.8) дает описание всех уравнений (11.1), удовлетворяющих принципу Гюйгенса, но он сложен и не достаточно эффективен при исследовании уравнений с произвольными переменными старшими коэффициентами. Это связано с тем, что в соответствии с формулой (11.6) для применения критерия Адамара нужно явно найти или же достаточно детально описать квадрат геодезического расстояния Г в рассматриваемом римановом пространстве V_4. В некоторых вопросах бывает достаточно вместо общего критерия использовать более простые необходимые условия выполнения принципа Гюйгенса, как это было, например, при доказательстве теоремы Матиссона—Асгейрссона. Ряд простых необходимых условий, имеющих тензорный характер, получили Günther [1] и McLenaghan [2] для произвольных уравнений вида (11.1) с $n=3$.

Гюнтер получил следующие четыре условия на коэффициенты уравнений (11.1), удовлетворяющих принципу Гюйгенса:

$$H=0, \tag{11.14}$$

$$g^{jl}K_{ij,\,l}=0, \tag{11.15}$$

$$g^{pq}\left[R_{jip,\,q}+C^m_{ijp}L_{mq}\right]=\frac{5}{2}g^{pq}\left[K_{ip}K_{jq}-\frac{1}{4}g_{ij}g^{ml}K_{pm}K_{ql}\right], \tag{11.16}$$

$$\frac{3}{2}g^{pq}R_{(ijp}K_{l)q}+g^{pq}C^m_{(ijp}K_{l)q,\,m}=\lambda_{(i}g_{jl)}. \tag{11.17}$$

Здесь использованы прежние обозначения (см. формулы (10.19), (8.17) и (8.18)):

$$H=c-\frac{1}{2}a^i_{,\,i}-\frac{1}{4}a^ia_i-\frac{1}{6}R,\quad K_{ij}=a_{i,\,j}-a_{j,\,i},$$

$$L_{ij}=-R_{ij}+\frac{1}{6}Rg_{ij},\quad R_{ijp}=L_{ip,\,j}-L_{ij,\,p}.^{*)}$$

В уравнениях (11.17) λ_i—произвольный вектор, а круглыми скобками обозначена стандартная операция симметризации по индексам i, j, l; например, $\lambda_{(i}g_{jl)}=\frac{1}{3!}\sum\lambda_ig_{jl}$ с суммированием по всем перестановкам индексов i, j, l. В выражениях типа $g^{pq}R_{(ijp}K_{l)q}$ индекс суммирования p не участвует в процессе симметризации.

---

*) В работах Гюнтера и Макленагана вместо R_{ijp} используется тензор $S_{ijp}=-\frac{1}{2}R_{pji}$.

Вектор λ_i можно исключить из уравнений (11.17) путем преобразования тензоров в симметричные тензоры с нулевым следом. Говорят, что симметричный тензор $t_{i_1 \ldots i_r}$ в римановом пространстве V_m с метрическим тензором g_{ij} имеет нулевой след, если $g^{kl} t_{kli_1 \ldots i_{r-2}} = 0$. Любой тензор можно превратить в симметричный тензор с нулевым следом. Например, при $m=4$ и $r=2, 3, 4$ преобразование T симметричного тензора $t_{i_1 \ldots i_r}$ в симметричный тензор $T\{t_{i_1 \ldots i_r}\}$ с нулевым следом определяется следующими формулами:

$$T\{t_{ij}\} = t_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} \operatorname{Sp} t, \qquad \operatorname{Sp} t = g^{pq} t_{pq}; \tag{11.18}$$

$$T\{t_{ijk}\} = t_{ijk} - \frac{1}{4} g_{(ij} [\operatorname{Sp} t]_{k)}, \qquad [\operatorname{Sp} t]_k = 2 g^{pq} t_{pqk}; \tag{11.19}$$

$$T\{t_{ijkl}\} = t_{ijkl} - \frac{1}{4} g_{(ij} [\operatorname{Sp} t]_{kl)}, \qquad [\operatorname{Sp} t]_{kl} = 3 g^{pq} t_{pqkl} - \\ - \frac{1}{4} g_{kl} g^{pq} g^{rs} t_{pqrs}. \tag{11.20}$$

Пользуясь преобразованием (11.19) и принимая во внимание, что $T\{\lambda_{(i} g_{jl)}\} = 0$ для любого вектора λ_i, равенства (11.17) можно переписать в виде

$$T\left\{\frac{3}{2} g^{pq} R_{(ijp} K_{l)q} + g^{pq} C^m_{(ijp} K_{l)q,m}\right\} = 0. \tag{11.17'}$$

McLenaghan [2] дополнил четыре необходимых условия (11.14)—(11.17) следующим пятым условием:

$$\begin{aligned} TS\{&3 g^{rs} C_{pijq,r} C^p{}_{kl,s}{}^q - 4 C^p{}_{kl}{}^q{}_{,k} R_{lqp} + 10 R^p_{ij} R_{pkl} + \\ &+ 4 C^p{}_{ij}{}^q R_{kqp,l} + 12 C^p{}_{ij}{}^q R_{pkl,q} + 4 C^p{}_{ij}{}^q C_q{}^r{}_{kp} K_{lr} + \\ &+ 12 C^p{}_{ij}{}^q C^r_{klq} K_{pr} + 12 K_{pi,jk} K^p_l - 16 K_{pi,j} K^p_{k,l} - \\ &- 84 C_{pjkq} K^p_i K^q_l - 18 K_{pi} K^p_j L_{kl}\} = 0. \end{aligned} \tag{11.21}$$

Здесь символом S обозначена симметризация произвольного тензора и использованы обычные тензорные операции перемещения индексов из верхнего положения в нижнее и обратно с помощью метрического тензора. Все необходимые условия (11.14)—(11.17), (11.21), как и общий критерий справедливости принципа Гюйгенса, инвариантны относительно преобразований эквивалентности уравнения (11.1).

При дополнительном предположении $R_{ij} = 0$ уравнение (11.21) упрощается и принимает вид

$$TS\{g^{rs} R_{pijq,r} R^p{}_{kl}{}^q{}_{,s}\} = 0, \tag{11.22}$$

так как в этом случае $C^m_{ijk} = R^m_{ijk}$, а тензоры L_{ij} и $R_{ij,k}$ равны нулю, в силу чего равенства (11.16) дают $K_{ij} = 0$. Дальнейший анализ показывает (McLenaghan [1], § 5), что условие (11.22) характеризует пустые ($R_{ij} = 0$) пространства V_4, обладающие нетривиальной группой конформных движений: метрика каждого

пространства V_4 гиперболического типа, удовлетворяющего условиям $R_{ij}=0$ и (11.22), приводится к виду (8.30). Ввиду инвариантности принципа Гюйгенса относительно перехода к конформному пространству это означает, что всякое пространство V_4, которое комформно пустому пространству и в котором существует уравнение вида (11.1), удовлетворяющее принципу Гюйгенса, обладает нетривиальной конформной группой. Поэтому анализ уравнений в пространствах V_4 с нетривиальной конформной группой позволяет перенести теорему Матиссона—Асгейрссона на конформно-пустые пространства.

11.5. Преобразование Лагнеза — Штельмахера. Первый пример уравнения, удовлетворяющего принципу Гюйгенса и не приводимого преобразованиями (10.14) к волновому уравнению, построил Stellmacher [1]. Он исходил из уравнения

$$(\Box_6+c)u\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}+c\right)u=0 \tag{11.23}$$

с произвольным переменным коэффициентом $c=c(t, x^1, \ldots, x^5)$ и показал, что наряду с тривиальным случаем $c=0$ принцип Гюйгенса выполняется при следующих двух значениях коэффициента c:

$$c=-\frac{2}{t^2},\quad c=\frac{2}{(x^1)^2}. \tag{11.24}$$

Уравнения (11.23), соответствующие (11.24), не эквивалентны между собой и не приводятся к вол овому уравнению; последнее обстоятельство очевидно, так как инвариант Коттона (10.19) для уравнений вида (11.23) совпадает с коэффициентом c, и поэтому в случаях (11.24) не выполняется второе из условий (10.49). Оказалось, что при $c\neq 0$ всякое уравнение (11.23), удовлетворяющее принципу Гюйгенса, приводится к одному из случаев (11.24).

Позже Stellmacher [2] обобщил свой пример на произвольные нечетные n, рассмотрев уравнения

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\lambda_0}{t^2}u\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2}+\frac{\lambda_i}{(x^i)^2}u\right)=0 \tag{11.25}$$

с параметрами λ_k. Условие выполнения принципа Гюйгенса имеет вид

$$\lambda_k=-p_k(p_k+1),\quad p_k=0,\ 1,\ \ldots;\qquad \sum_{k=0}^{n}p_k\leqslant\frac{n-3}{2} \tag{11.26}$$

и при $n=3$ согласуется с теоремой Матиссона—Асгейрссона. Ввиду симметрии рассматриваемых уравнений относительно переменных t и x^i достаточно рассмотреть случай одного параметра λ_0. Тогда пример Штельмахера представляет собой специальное

уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\left(\Box_{n+1}-\frac{p(p+1)}{t^2}\right)u=0, \qquad p=0,\ 1,\ \ldots, \tag{11.27}$$

удовлетворяющее условиям: $n\geqslant 3$ нечетно, $p\leqslant\frac{n-3}{2}$. Здесь

$$\Box_{n+1}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_n, \qquad \Delta_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}.$$

Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\left(\Box_{n+1}+\frac{\lambda}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0,$$

эквивалентное (11.27) при соответствующих значениях параметра λ, изучалось с точки зрения сингулярной задачи Коши (см. Weinstein [1, 2], Diaz & Weinberger [1]):

$$u(x,\ 0)=f(x), \quad u_t(x,\ 0)=0.$$

Использованное при этом соотношение $u^{(\lambda)}=t^{1-\lambda}u^{(2-\lambda)}$ между решениями $u^{(\lambda)}(x,\ t)$ и $u^{(2-\lambda)}(x,\ t)$, соответствующими значениям параметра λ и $2-\lambda$, позволяет получать нетривиальные уравнения, удовлетворяющие принципу Гюйгенса, но только в случае сингулярной задачи. Более общий метод построения уравнений специального вида, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, предложили Lagnese & Stellmacher [1]. Суть метода состоит в следующем.

Рассматриваются операторы

$$L_{n+1}=\Delta_n-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c(t)\right) \tag{11.28}$$

с гладким коэффициентом $c(t)$. Подстановка $b=\frac{\mu'}{\mu}$, где $\mu=\mu(t)$ — ненулевое решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\mu''+c(t)\mu=0 \qquad \left(\mu'=\frac{d\mu}{dt}\right), \tag{11.29}$$

реализует разложение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c=\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-b\right)\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b'-b^2.$$

Линейные дифференциальные операторы первого порядка, участвующие в этом разложении, обозначаются l, l^*:

$$l=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\mu'}{\mu}, \quad l^*=-\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\mu'}{\mu}, \tag{11.30}$$

и оператор (11.28) записывается в виде

$$L_{n+1}=\Delta_n+l^*l. \tag{11.31}$$

Вместе с (11.31) рассматривается оператор

$$\tilde{L}_{n+1}=\Delta_n+ll^*, \tag{11.32}$$

который также имеет вид (11.28) с коэффициентом $\tilde{c}(t)$, определяемым из равенства

$$ll^*=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c(t)+2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2. \tag{11.33}$$

Из (11.31) и (11.32) следует коммутационное соотношение

$$lL_{n+1}=\tilde{L}_{n+1}l. \tag{11.34}$$

Из (11.29) и (11.33) видно, что совпадение операторов L_{n+1} и $\tilde{L}_{n+1}$ (т. е. коммутативность l и l^*) возможно только при $c(t)=$ $=\text{const}$. Значение преобразования Лагнеза—Штельмахера $L_{n+1}\mapsto$ $\mapsto\tilde{L}_{n+1}$ выясняет следующее утверждение (Lagnese & Stellmacher [1], теорема 1):

Если оператор L_{n+1} (или, что то же самое, соответствующее уравнение $L_{n+1}u=0$) удовлетворяет принципу Гюйгенса, то этим свойством обладает также оператор $\tilde{L}_{n+3}$.

Рассмотрим частный случай $n=3$ и $L_4=-\Box_4$. Уравнение (11.29) имеет общее решение $\mu=k_1t+k_2$. При $k_1=0$ теорема Лагнеза—Штельмахера приводит к волновому уравнению с пятью пространственными переменными, а при $k_1\neq 0$—к оператору $\tilde{L}_6=\Delta_5-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+$ $+2(t+k)^{-2}$, $k=\frac{k_2}{k_1}$, который после замены $t\mapsto t+k$ дает уравнение Штельмахера (11.23) с коэффициентом $c=-\frac{2}{t^2}$. Это верно для любого значения n: исходя из волнового оператора $L_{n+1}=$ $=-\Box_{n+1}$ и пользуясь формулами (11.32), (11.33), можно получить уравнения (11.27) с $p=0$ и $p=1$. Остальные из уравнений (11.27) получаются последовательным применением этой процедуры. Действительно, для $c(t)=-\frac{p(p+1)}{t^2}$ уравнению (11.29) удовлетворяет функция $\mu=t^{p+1}$, и формулы (11.32), (11.33) осуществляют необходимое преобразование

$$\Box_{n+1}-\frac{p(p+1)}{t^2}\mapsto\tilde{L}_{n+1}=\Box_{n+1}-\frac{(p+1)(p+2)}{t^2}.$$

Таким образом, все упомянутые выше примеры Штельмахера при произвольном нечетном $n\geqslant 5$ можно получить по теореме Лагнеза—Штельмахера, исходя из волнового уравнения (11.9). Однако эта теорема позволяет построить также новые примеры уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса. Например, если в качестве исходного оператора L_{n+1} взять

$$L_{n+1}=\Delta_n-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2}{t^2}\right) \tag{11.35}$$

с произвольным нечетным $n \geqslant 5$ и подставить в формулу (11.33) общее решение $\mu = k_1 t^2 + k_2 t^{-1}$ соответствующего уравнения (11.29), то

$$\tilde{L}_{n+1} = \Delta_n - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{6t\,(t^3 - 2k)}{(t^3 + k)^2} \right), \quad k = \frac{k_2}{k_1}.$$

Постоянную k можно исключить (например, положить $k = -1$, если $k \neq 0$) с помощью подходящих преобразований (10.14). Следовательно, оператор

$$L_{n+3} = \Delta_{n+2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{6t\,(2 + t^3)}{(1 - t^3)^2} \right) \tag{11.36}$$

удовлетворяет принципу Гюйгенса. Продолжение этого процесса приводит к более сложным примерам.

Возникает естественный вопрос о широте класса уравнений, получаемых указанным способом. В частности, интересно выяснить, можно ли получить все операторы (11.28), удовлетворяющие принципу Гюйгенса, исходя из классического волнового оператора $\Box_4$ и последовательно применяя преобразование Лагнеза — Штельмахера $L_{n+1} \mapsto \tilde{L}_{n+3}$. Lagnese [1] дал положительный ответ на этот вопрос и тем самым решил проблему Адамара для операторов вида (11.28). Это обстоятельство с учетом специальных свойств преобразования Лагнеза — Штельмахера позволяет описать структуру коэффициента $c(t)$ всех операторов (11.28), удовлетворяющих принципу Гюйгенса (Lagnese [2]).

Метод Лагнеза — Штельмахера переносится также на операторы вида

$$L^{(i)}_{n+1} = \Box_{n+1} + c\,(x^i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11.37}$$

Так как t-операторы (11.30) коммутируют с аналогичными x-операторами, то теорема Лагнеза — Штельмахера применима к суперпозиции t- и x-преобразований Лагнеза — Штельмахера.

11.6. Современное состояние и обобщения проблемы Адамара. Примеры Штельмахера показывают, что теорема Матиссона — Асгейрссона о единственности гюйгенсова уравнения в четырехмерных конформно-плоских пространствах не переносится на пространства большей размерности. В соответствии с теоремой Лагнеза — Штельмахера число таких уравнений растет вместе с размерностью пространства. Это подчеркивает особое положение четырехмерного пространства. К настоящему времени проблема Адамара наиболее полно исследована именно в пространствах V_4, в основном благодаря работам Гюнтера и его учеников (Günther [1—4], Günther & Wünsch [1], Wünsch [1, 2], Schimming [1]).

Günther [3] первым установил существование пространств, которые не конформны плоскому пространству и в которых выполняется принцип Гюйгенса. Он рассмотрел пространства V_4 с метрикой плоской волны (8.30) и показал, что в них для волнового уравнения (10.15) выполняется критерий Адамара. Кроме

того, необходимые условия (11.14)—(11.16) позволяют перенести теорему единственности Матиссона—Асгейрссона на рассматриваемые пространства. В силу теоремы 8.5 это решает проблему Адамара в пространствах V_4 с нетривиальной конформной группой, и для полного решения проблемы при $n=3$ остается рассмотреть уравнения (11.1) в пространствах с тривиальной конформной группой. Здесь первостепенное значение имеет следующий вопрос: существуют ли пространства V_4 с тривиальной конформной группой, в которых уравнения вида (11.1) удовлетворяют принципу Гюйгенса? На основе предварительных результатов, полученных с помощью необходимых условий Гюнтера и Макленагана для пространств специального вида (см. McLenaghan [2] и Schimming [2]), можно ожидать, что ответ должен быть отрицательным. Доказательство справедливости этого предположения было бы окончательным решением проблемы Адамара при $n=3$.

В отличие от $n=3$ при $n\geqslant 5$, насколько мне известно, до сих пор проблема Адамара не решена ни в каком пространстве V_{n+1}. В случае произвольного n кроме результатов Штельмахера и Лагнеза, относящихся к уравнениям специального вида в плоских пространствах, имеется доказательство справедливости принципа Гюйгенса для волнового уравнения в каждом пространстве V_{n+1} с нетривиальной конформной группой (см. Ибрагимов, Мамонтов [2] и теорему 8.5). Можно также отметить обобщение некоторых результатов на сингулярную задачу Коши (Fox [1], Günther [2], Solomon [1]).

Открытие принципа Гюйгенса в неплоских пространствах явилось стимулом для систематического изучения основных уравнений математической физики в полях тяготения с точки зрения принципа Гюйгенса. Были рассмотрены уравнения Максвелла

$$d\omega=0, \quad \delta\omega=0$$

для произвольных дифференциальных форм ω (Günther [4], Künzle [1], Günther & Wünsch [1], Wünsch [1]; см. также Penrose [2]), линейные уравнения второго порядка для произвольных полей (Schimming [1]) и спинорные полевые уравнения (Wünsch [2]). Изложение общей теории, удобной для подобных исследований, можно найти, например, в следующих работах: Riesz [1], Duff [1], Lichnerowicz [3, 4], Friedlander [1].

В случае классического волнового уравнения принцип Гюйгенса эквивалентен образованию заднего фронта волны за конечное время. Для уравнений с переменными коэффициентами это можно установить лишь после соответствующего глобального анализа задачи. В качестве нетривиального примера можно привести волновое уравнение на сфере

$$u_{tt}-\Delta_s u+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 u=0, \tag{11.38}$$

которое рассмотрели Lax & Phillips [1]. Здесь Δ_s—оператор Лапласа—Бельтрами на n-мерной единичной сфере, n нечетно. Локальное выполнение принципа Гюйгенса здесь очевидно, так как соответствующее риманово пространство V_{n+1} представляет собой прямое произведение вещественной прямой с n-мерным пространством постоянной кривизны и поэтому локально конформно плоскому пространству. Однако уравнение (11.38) невозможно глобально преобразовать в волновое уравнение в плоском пространстве преобразованиями вида (10.14). Более общий случай гиперболических систем уравнений рассмотрел Семенов-Тян-Шанский [1] в связи с изучением инвариантных операторов в римановых симметрических пространствах. Глобальное изучение гладких лоренцевых пространств, локально обладающих нетривиальной конформной группой, показывает (Cahen & Kerbrat [1]), что таким свойством обладают только классические пространства. Поэтому для глобального изучения принципа Гюйгенса важно исследовать особенности римановых многообразий гиперболического типа с локально нетривиальной группой конформных движений. Следует также отметить, что проблема глобального анализа принципа Гюйгенса тесно соприкасается с обширной программой изучения лакун в областях зависимости гиперболических систем дифференциальных уравнений (см. Петровский [1], Atiyah, Bott, Gårding [1], Gårding [1]).

В следующих параграфах излагается теоретико-групповой подход к проблеме Адамара. Изучение конформно-инвариантных уравнений в римановых пространствах естественно ведет к рассмотрению волнового уравнения (10.15) в пространствах с нетривиальной конформной группой и позволяет установить взаимосвязь принципа Гюйгенса с конформной инвариантностью в пространствах V_4. Волновое уравнение в метрике (8.30) может быть детально исследовано. Полученное интегральное представление решения задачи Коши (Ибрагимов, Мамонтов [1, 2]) обобщает классические формулы Пуассона и Тедоне на произвольные пространства V_{n+1} с нетривиальной конформной группой и выявляет справедливость принципа Гюйгенса.

§ 12. Волновое уравнение в V_4

12.1. Вычисление геодезического расстояния в метрике плоской волны. Пусть геодезическая линия, проходящая через фиксированную точку $x_0 \in V_n$ и переменную точку $x \in V_n$, параметризована с помощью длины дуги s, отсчитываемой от точки x_0. Тогда координаты $x^i = x^i(s)$ точки x удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{12.1}$$