ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ГЛАВА 3

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРУПП ЛИ — БЕКЛУНДА

§ 14. Касательные преобразования Ли и теорема Беклунда

14.1. Контактные преобразования. Естественное обобщение идеи продолжения точечных преобразований (§ 4.1) приводит к касательным, или контактным *), преобразованиям Ли (Lie [6], том 4). При этом рассматривается группа G (для простоты можно ограничиться однопараметрическими группами) точечных преобразований

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i\left(x, u, \underset{1}{u}, a\right), \\ u'^\alpha &= \varphi^\alpha\left(x, u, \underset{1}{u}, a\right), \\ u'^\alpha_i &= \psi^\alpha_i\left(x, u, \underset{1}{u}, a\right), \qquad i=1, \ldots, n, \quad \alpha=1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{14.1}$$

в пространстве независимых переменных $x=(x^1, \ldots, x^n)$, $u=(u^1, \ldots, u^m)$, $\underset{1}{u}=(u^1_1, u^1_2, \ldots, u^m_n)$. Действие группы G продолжается на переменные dx, du, $\underset{1}{du}$ по формулам

$$\begin{aligned} dx'^i &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial f^i}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial f^i}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j, \\ du'^\alpha &= \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j, \\ du'^\alpha_i &= \frac{\partial \psi^\alpha_i}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \psi^\alpha_i}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \psi^\alpha_i}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j, \end{aligned} \tag{14.2}$$

в результате чего получается продолженная группа $\tilde{G}$, действующая в пространстве $\left(x, u, \underset{1}{u}, dx, du, \underset{1}{du}\right)$. Преобразования (14.1) называются *контактными*, если группа $\tilde{G}$ сохраняет уравнение

*) В дальнейшем термин «контактный» используется исключительно для касания первого порядка, тогда как термин «касательный» — в общем случае касания произвольного (в частности, первого и бесконечного) порядка.

(4.7), выражающее условие касания первого порядка. Ли рассматривал только случай $m=1$, так как, оказывается, при $m>1$ контактные преобразования сводятся к точечным *):

Теорема. *Если $m>1$, то группа G контактных преобразований* (14.1) *является первым продолжением* (*в смысле* § 4.1) *группы точечных преобразований* (4.1).

Доказательство. Если

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$$

— оператор группы G, где

$$\xi^i=\frac{\partial f^i}{\partial a}\bigg|_{a=0},\quad \eta^\alpha=\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial a}\bigg|_{a=0},\quad \zeta_i^\alpha=\frac{\partial\psi_i^\alpha}{\partial a}\bigg|_{a=0},$$

то оператор группы $\tilde G$ имеет вид (дифференцирование по du_i^α, которое здесь не используется, опущено)

$$\tilde X=X+\tilde\xi^i\frac{\partial}{\partial(dx^i)}+\tilde\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial(du^\alpha)}$$

с

$$\tilde\xi^i=\frac{\partial(dx'^i)}{\partial a}\bigg|_{a=0},\quad \tilde\eta^\alpha=\frac{\partial(du'^\alpha)}{\partial a}\bigg|_{a=0}.$$

В силу (14.2) величины $\tilde\xi$, $\tilde\eta$ и ξ, η связаны соотношениями

$$\tilde\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta}du^\beta+\frac{\partial\xi^i}{\partial u_j^\beta}du_j^\beta,$$
$$\tilde\eta^\alpha=\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u_j^\beta}du_j^\beta.$$

С помощью полученного выражения для оператора $\tilde X$ критерий инвариантности уравнения (4.7):

$$\tilde X\omega^\alpha|_{\omega=0}=0,\qquad \alpha=1,\ \ldots,\ m,$$

можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^j}+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta}u_j^\beta-u_i^\alpha\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}-u_i^\alpha u_j^\beta\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta}-\zeta_j^\alpha\right)dx^j+\left(\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u_j^\beta}-u_i^\alpha\frac{\partial\xi^i}{\partial u_j^\beta}\right)du_j^\beta=0.$$

Так как здесь все величины dx^j, du_j^β играют роль независимых переменных, то коэффициенты при них должны обращаться в нуль. Следовательно, функции $\xi^i\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$, $\eta^\alpha\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$, $\zeta_i^\alpha\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$

---

*) По-видимому, этот факт был хорошо известен во времена Ли. Хотя в классической литературе мне не встречалось явное упоминание о нем, но нетрудно заметить, что приводимая здесь теорема эквивалентна теореме Беклунда (§ 14.2) о несуществовании касательных преобразований конечного порядка > 1. См. также Ибрагимов [1], §§ 2, 3 и Anderson & Ibragimov [2], стр. 39.

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\zeta_i^\alpha = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} - u_j^\alpha \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta} \right), \quad \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u_i^\beta} - u_j^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u_i^\beta} = 0,$$

или

$$\zeta_i^\alpha = \frac{\partial W^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial W^\alpha}{\partial u^\beta}, \quad \xi^i \delta_\beta^\alpha + \frac{\partial W^\alpha}{\partial u_i^\beta} = 0, \tag{14.3}$$

где

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha. \tag{14.4}$$

При $m > 1$ второе семейство уравнений (14.3) дает

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial u_i^\beta} = 0, \qquad \alpha \neq \beta,$$

$$\frac{\partial W^1}{\partial u_i^1} = \frac{\partial W^2}{\partial u_i^2} = \ldots = \frac{\partial W^m}{\partial u_i^m},$$

откуда

$$W^\alpha = U^\alpha(x, u) - u_i^\alpha V^i(x, u)$$

с произвольными функциями U^α, V^i. Подстановка полученной формулы в уравнения (14.3), (14.4) приводит к выражениям

$$\xi^i = V^i(x, u), \qquad \eta^\alpha = U^\alpha(x, u),$$
$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j)$$

для координат оператора X. Сравнение с (4.4) и (4.8) завершает доказательство теоремы.

В случае $m = 1$ из уравнений (14.3), (14.4) получается хорошо известная инфинитезимальная характеристика касательных преобразований Ли: *оператор*

$$X = \xi^i \left(x, u, \underset{1}{u}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \left(x, u, \underset{1}{u}\right) \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_i \left(x, u, \underset{1}{u}\right) \frac{\partial}{\partial u_i} \tag{14.5}$$

является инфинитезимальным оператором группы контактных преобразований тогда и только тогда, когда

$$\xi^i = -\frac{\partial W}{\partial u_i}, \quad \eta = W - u_i \frac{\partial W}{\partial u_i}, \quad \zeta_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial W}{\partial u} \tag{14.6}$$

с некоторой функцией $W = W\left(x, u, \underset{1}{u}\right)$.

Классическим примером контактного преобразования является преобразование Лежандра

$$x'^i = u_i, \quad u' = u_i x^i - u, \quad u'_i = x^i;$$

сохранение условия касания

$$du - u_i\, dx^i = 0 \tag{14.7}$$

очевидно, так как в данном случае

$$du' - u'_i\, dx'^i = -(du - u_i\, dx^i).$$

Контактные преобразования появляются в оптике в виде геометрического построения Гюйгенса (см., например, Baker & Copson [1], § 2), а их роль в механике обсуждается в любом обстоятельном учебнике по аналитической механике. Что касается литературы по теории групп контактных преобразований и их применениям в механике и геометрии, то кроме уже цитированного 4-го тома Собрания сочинений С. Ли этой теме посвящены книги Lie & Scheffers [1] и Lie & Engel [1], том 2; следует еще назвать вторую часть книги Клейна [3], в особенности насыщенный идеями § 76.

Благодаря работам Ли контактные преобразования заняли особое место в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Объясняется это тем, что под действием контактных преобразований всякое уравнение первого порядка переходит снова в уравнение первого порядка, а решения исходного уравнения — в решения преобразованного уравнения, причем любые два уравнения можно перевести друг в друга подходящим контактным преобразованием. Можно сказать, что группа контактных преобразований действует на множестве уравнений первого порядка, причем это действие транзитивно; это связано с тем, что в качестве производящей функции W (формула (14.6)) группы контактных преобразований можно выбрать произвольную функцию от x, u, u_1. Естественно спросить, нельзя ли построить подобную теорию преобразований для уравнений более высокого порядка, введя в рассмотрение касательные преобразования высших порядков. Эта задача была поставлена еще в основополагающей работе С. Ли по теории инвариантов контактных преобразований (Lie [1], стр. 223) в виде следующих двух вопросов:

1. Существуют ли преобразования, не являющиеся контактными, но сохраняющие условия касания высшего порядка?

2. Допускают ли дифференциальные уравнения в частных производных порядка выше первого такие преобразования, которые не являются контактными?

Ли считал, что ответ на первый из этих вопросов должен быть отрицательным, а на второй — положительным, и подчеркивал важность реализации этой второй возможности обобщения контактных преобразований. Вскоре Lie [2] установил, что такое обобщение действительно возможно: он построил соответствующее преобразование, придав аналитическую форму известной геометрической конструкции Bianchi [1], переводящей любую поверхность отрицательной постоянной кривизны снова в поверхность той же кривизны. Справедливость гипотезы Ли об отсутствии касательных преобразований высшего порядка подтвердил Bäcklund [1, 2]: он доказал, что всякое (однозначное) преобразование, сохраняющее условия касания конечного порядка, является контактным. Эти результаты кратко излагаются ниже; их подробное

обсуждение читатель может найти в нашей недавно вышедшей книге (Anderson & Ibragimov [2], глава 1).

14.2. Касательные преобразования конечного порядка. Рассматриваются преобразования

$$
\begin{aligned}
x'^i &= f^i\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}, a\right),\\
u'^\alpha &= \varphi^\alpha\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}, a\right),\\
u'^\alpha_{i_1\ldots i_s} &= \psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}, a\right), \qquad s=1, \ldots, k,
\end{aligned}
\tag{14.8}
$$

переменных $x=(x^1, \ldots, x^n)$, $u=(u^1, \ldots, u^m)$,

$\underset{s}{u}=\{u^\alpha_{i_1\ldots i_s} \mid \alpha=1, \ldots, m;\ i_1, \ldots, i_s=1, \ldots, n\}$, $s=1, \ldots, k$,

где $u^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ симметричны по нижним индексам.

Определение. Преобразование T вида (14.8) называется *касательным преобразованием порядка* k, если его продолжение на дифференциалы dx, du, $\underset{1}{du}$, ... сохраняет пфаффову систему

$$\Omega_k:\ \omega=0,\ \underset{1}{\omega}=0,\ \ldots,\ \underset{k-1}{\omega}=0, \tag{14.9}$$

где $\omega=(\omega^1, \ldots, \omega^m)$, $\underset{s}{\omega}=\{\omega^\alpha_{i_1\ldots i_s} \mid \alpha=1, \ldots, m;\ i_1, \ldots, i_s=1, \ldots, n\}$—дифференциальные формы с компонентами

$$\omega^\alpha = du^\alpha - u^\alpha_j dx^j,\quad \omega^\alpha_{i_1\ldots i_s} = du^\alpha_{i_1\ldots i_s} - u^\alpha_{i_1\ldots i_s j}\, dx^j. \tag{14.10}$$

Теорема Беклунда о несуществовании касательных преобразований конечного порядка k, отличных от контактных преобразований, относится к случаю $m=1$ и гладких однозначных и однозначно обратимых отображений T. Bäcklund [1] пользовался следующими геометрическими рассуждениями (для простоты берется случай $n=1$, $k=2$). Пусть в плоскости (x, u) заданы две произвольные гладкие кривые C_1 и C_2, имеющие касание первого порядка в точке P. Нужно показать, что кривые $C_1'=T(C_1)$ и $C_2'=T(C_2)$ имеют касание первого порядка в точке $P'=T(P)$. Для этого достаточно заметить, что при произвольно выбранных точках $P_1 \in C_1$ и $P_2 \in C_2$ можно построить гладкую кривую C, имеющую касание второго порядка с C_1 и C_2 в точках P_1 и P_2 соответственно. По предположению теоремы кривая $C'=T(C)$ будет иметь касание второго порядка с C_1' и C_2' в точках $P_1'=T(P_1)$ и $P_2'=T(P_2)$; пусть τ_1, τ_2—соответствующие касательные в этих точках. При любой заданной окрестности точки P' можно выбрать точки P_1, P_2 так, чтобы их образы P_1' и P_2' принадлежали этой окрестности. Поэтому касательные τ_1 и τ_2 в пределе совпадают и дают касательную к кривым C_1' и C_2' в точке P'.

Приведенные рассуждения можно обобщить на произвольные m, n и k. Однако удобнее пользоваться инфинитезимальным критерием инвариантности уравнений (14.9), предполагая, что преобразования (14.8) образуют однопараметрическую группу (Ибрагимов [1], Ibragimov & Anderson [1]). Пусть G—группа касательных преобразований (14.8) порядка $k<\infty$ с инфинитезимальным оператором

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}+\ldots+\zeta_{i_1\ldots i_k}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{i_1\ldots i_k}^\alpha}, \tag{14.11}$$

где

$$\xi^i=\frac{\partial f^i}{\partial a}\Big|_{a=0},\quad \eta^\alpha=\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0},\quad\ldots,\quad \zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha=\frac{\partial\psi_{i_1\ldots i_s}^\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0},$$
$$s=1,\ \ldots,\ k.$$

Оператор (14.11) продолжается на дифференциалы dx, du, $\underset{1}{du}$, $\ldots$ $\ldots$, $\underset{k-1}{du}$ по формулам

$$\tilde X=X+\tilde\xi^i\frac{\partial}{\partial(dx^i)}+\tilde\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial(du^\alpha)}+\tilde\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial(du_i^\alpha)}+\ldots$$
$$\ldots+\tilde\zeta_{i_1\ldots i_{k-1}}^\alpha\frac{\partial}{\partial(du_{i_1\ldots i_{k-1}}^\alpha)}; \tag{14.12}$$

$$\tilde\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta}du^\beta+\ldots+\frac{\partial\xi^i}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}du_{j_1\ldots j_k}^\beta,$$
$$\tilde\eta^\alpha=\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta+\ldots+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}du_{j_1\ldots j_k}^\beta, \tag{14.13}$$
$$\tilde\zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha=\frac{\partial\zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta+\ldots+\frac{\partial\zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}du_{j_1\ldots j_k}^\beta.$$

Критерий инвариантности уравнений (14.9):

$$\tilde X\omega=0,\quad \tilde X\underset{1}{\omega}=0,\quad\ldots,\quad \tilde X\underset{k-1}{\omega}=0\ \text{на}\ \Omega_k,$$

в силу (14.12), (14.10) записывается в виде

$$(\tilde\eta^\alpha-\tilde\xi^j u_j^\alpha-\zeta_j^\alpha dx^j)|_{\Omega_k}=0,$$
$$(\tilde\zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha-\tilde\xi^j u_{i_1\ldots i_s j}^\alpha-\zeta_{i_1\ldots i_s j}^\alpha dx^j)|_{\Omega_k}=0, \tag{14.14}$$
$$s=1,\ \ldots,\ k-1.$$

Из уравнений (14.9), (14.10) можно выразить дифференциалы du^α, $\ldots$, $du_{i_1\ldots i_{k-1}}^\alpha$ через независимые величины u^α, $\ldots$, $u_{i_1\ldots i_k}^\alpha$, dx^i. Подстановка этих выражений в уравнения (14.14) с исполь-

зованием формул (14.13) и дифференциальных операторов

$$\underset{s}{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ii_1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + \ldots + u_{ii_1 \ldots i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \ldots i_s}^\alpha} \tag{14.15}$$

дает (так как здесь величины dx^i и $du_{i_1 \ldots i_k}^\alpha$ играют роль независимых переменных)

$$\begin{gathered} \zeta_i^\alpha = \underset{k-1}{D}_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha \underset{k-1}{D}_i(\xi^j), \\ \zeta_{ii_1 \ldots i_s}^\alpha = \underset{k-1}{D}_i(\zeta_{i_1 \ldots i_s}^\alpha) - u_{i_1 \ldots i_s j}^\alpha \underset{k-1}{D}_i(\xi^j), \\ s = 1, \ldots, k-1; \end{gathered} \tag{14.16}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u_{i_1 \ldots i_k}^\beta} - u_j^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{i_1 \ldots i_k}^\beta} = 0, \\ \frac{\partial \zeta_{i_1 \ldots i_s}^\alpha}{\partial u_{j_1 \ldots j_k}^\beta} - u_{i_1 \ldots i_s j}^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u_{j_1 \ldots j_k}^\beta} = 0, \quad s = 1, \ldots, k-1. \end{gathered} \tag{14.17}$$

Уравнения (14.17) удобно переписать с помощью функций

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha, \qquad W_{i_1 \ldots i_s}^\alpha = \zeta_{i_1 \ldots i_s}^\alpha - \xi^j u_{i_1 \ldots i_s j}^\alpha \tag{14.18}$$

в следующей форме:

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial u_{j_1 \ldots j_k}^\beta} = 0, \qquad \frac{\partial W_{i_1 \ldots i_s}^\alpha}{\partial u_{j_1 \ldots j_k}^\beta} = 0, \qquad s = 1, \ldots, k-2, \tag{14.19}$$

$$\frac{\partial W_{i_1 \ldots i_{k-1}}^\alpha}{\partial u_{j_1 \ldots j_k}^\beta} = \xi^{j_k} \delta_\beta^\alpha \delta_{i_1 \ldots i_{k-1}}^{j_1 \ldots j_{k-1}}. \tag{14.20}$$

Пусть сначала $m > 1$. Тогда из (14.20) следует, что

$$\frac{\partial W_{i_1 \ldots i_{k-1}}^\alpha}{\partial u_{j_1 \ldots j_k}^\beta} = 0, \qquad \alpha \neq \beta, \tag{14.21}$$

для всех значений индексов $\alpha, i_1, \ldots, i_{k-1}, j_1, \ldots, j_k$ и

$$\xi^j = -\frac{\partial W_{i_1 \ldots i_{k-1}}^\alpha}{\partial u_{i_1 \ldots i_{k-1} j}^\alpha} \tag{14.22}$$

(в последней формуле ни по каким индексам суммирования нет). Из (14.22) сразу следует, что величины ξ^i не зависят от $\underset{k}{u}$, и общее решение уравнений (14.22) имеет вид

$$W_{i_1 \ldots i_{k-1}}^\alpha = U_{i_1 \ldots i_{k-1}}^\alpha - \xi^j u_{i_1 \ldots i_{k-1} j}^\alpha$$

с произвольными функциями $U^{\alpha}_{i_1 \ldots i_{k-1}}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k-1}{u}\right)$. Из уравнений (14.18), (14.19) следует, что координаты ξ^i, η^α, ..., $\zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_{k-1}}$ оператора (14.11) не зависят от $\underset{k}{u}$. Это означает, что в формулах (14.8) величины x, u, $\underset{1}{u}$, ..., $\underset{k-1}{u}$ преобразуются независимо от $\underset{k}{u}$. Индукция и теорема 14.1 дают, что $\xi^i = \xi^i(x, u)$, $\eta^\alpha = \eta^\alpha(x, u)$, а координаты $\zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_s}$ даются формулами (14.16). Следовательно, в случае $m > 1$ группа G представляет собой k раз продолженную группу точечных преобразований в пространстве (x, u).

Пусть теперь $m = 1$. Если $n > 1$, то уравнения (14.20) дают

$$\xi^j = -\frac{\partial W_{i_1 \ldots i_{k-1}}}{\partial u_{i_1 \ldots i_{k-1} j}} \quad \text{(суммирования нет)},$$

$$\left.\frac{\partial W_{i_1 \ldots i_{k-1}}}{\partial u_{j_1 \ldots j_{k-1} j}}\right|_{(j_1, \ldots, j_{k-1}) \neq (i_1, \ldots, i_{k-1})} = 0.$$

Отсюда, как и выше, следует, что ξ^i не зависят от $\underset{k}{u}$ и

$$W_{i_1 \ldots i_{k-1}} = U_{i_1 \ldots i_{k-1}}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k-1}{u}\right) - \xi^j\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k-1}{u}\right) u_{i_1 \ldots i_{k-1} j}.$$

По индукции получается, что координаты ξ^i, η, ζ_i зависят только от x, u, $\underset{1}{u}$, а остальные координаты $\zeta_{i_1 \ldots i_s}$ $(s = 2, \ldots, k)$ даются обычными формулами продолжения. Следовательно, в этом случае G представляет собой $(k-1)$-е продолжение группы контактных преобразований.

Сказанное выше верно и в случае $m = n = 1$. Уравнения (14.18)—(14.20) дают

$$W = \eta - \xi u_1, \quad W_1 = \zeta_1 - \xi u_2, \quad \ldots, \quad W_{k-1} = \zeta_{k-1} - \xi u_k, \tag{14.23}$$

где $u_s = \underset{s}{u}$, $\zeta_s = \zeta_{\underbrace{1 \ldots 1}_{s}}$, и

$$\frac{\partial W}{\partial u_k} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_k} = 0, \tag{14.24}$$

$$\xi = -\frac{\partial W_{k-1}}{\partial u_k}. \tag{14.25}$$

С помощью (14.23) и (14.16) получаются равенства

$$\underset{k-1}{D}(W_{k-2}) = \underset{k-1}{D}(\zeta_{k-2}) - u_{k-1} \underset{k-1}{D}(\xi) - \xi u_k = \zeta_{k-1} - \xi u_k = W_{k-1},$$

или, используя определение оператора $\underset{k-1}{D}$,

$$W_{k-1} = \frac{\partial W_{k-2}}{\partial x} + \ldots + u_{k-1} \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-2}} + u_k \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}}.$$

Это равенство вместе с (14.23) и (14.25) дает

$$\xi = -\frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}}, \quad \eta = W - u_1 \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}},$$
$$\zeta_1 = W_1 - u_2 \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}}, \ \ldots, \ \zeta_{k-2} = W_{k-2} - u_{k-1} \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}},$$
$$\zeta_{k-1} = \frac{\partial W_{k-2}}{\partial x} + u_1 \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u} + \ldots + u_{k-1} \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-2}}.$$

Отсюда с учетом уравнений (14.24) следует, что $\xi, \eta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$ зависят только от $x, u, u_1, \ldots, u_{k-1}$, и дальше вопрос решается по индукции. Таким образом, справедлива теорема Беклунда в следующей формулировке.

Теорема. *Всякая группа касательных преобразований порядка $k < \infty$ является продолжением группы точечных преобразований, если $m > 1$, и группы контактных преобразований, если $m = 1$.*

14.3. Преобразование Бианки — Ли. В трехмерном евклидовом пространстве рассматривается поверхность S постоянной отрицательной кривизны $-1/a^2$, где a — произвольная положительная постоянная; этой поверхности сопоставляется другая поверхность S' так, что каждой точке $M \in S$ соответствует точка $M' \in S'$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $|MM'| = a$, где $|MM'|$ — расстояние между M и M';

2) $\angle(\tau, \tau') = 90°$, где τ, τ' — касательные плоскости к S, S' в точках M, M' соответственно;

3) $MM' \in \tau \cap \tau'$.

Bianchi [1] доказал, что при этих условиях S' также представляет собой поверхность постоянной кривизны $-1/a^2$.

Для изучения свойств семейства преобразованных поверхностей S' Ли выразил геометрическое построение Бианки в эквивалентной аналитической форме. В основу рассмотрения кладется дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$s^2 - rt = \frac{1 + p^2 + q^2}{a^2}, \tag{14.26}$$

которому удовлетворяет любая поверхность постоянной кривизны $-1/a^2$; здесь использованы обычные обозначения p, q, r, s, t для первых и вторых частных производных от z по x и y. Пусть (x, y, z) и (x', y', z') — координаты точек $M \in S$ и $M' \in S'$, а (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') — соответствующие элементы поверхности. В этих обозначениях условия 1)—3) построения Бианки принимают вид

$$\begin{aligned} (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 &= a^2, \\ p(x-x') + q(y-y') - (z-z') &= 0, \\ p'(x-x') + q'(y-y') - (z-z') &= 0, \\ pp' + qq' + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{14.27}$$

Для любого заданного элемента поверхности (x, y, z, p, q) уравнения (14.27) задают четыре соотношения между пятью величинами x', y', z', p', q' и, следовательно, определяют ∞^1 элементов поверхности. Будем считать z заданной функцией от x, y и отождествлять величины p, q, r, s, t с частными производными z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}. Пусть функция $z=z(x, y)$ задает поверхность S. Если элемент (x', y', z', p', q'), связанный с элементом поверхности $(x, y, z, p, q)\in S$ соотношениями (14.27), удовлетворяет условию интегрируемости

$$\frac{\partial p'}{\partial y'}-\frac{\partial q'}{\partial x'}=0 \quad \text{на} \quad S, \tag{14.28}$$

то говорят, что *поверхность* $S': z'=z'(x', y')$ *получена из* S *преобразованием* (14.27). Lie [2] показал, что это преобразование дает положительный ответ на второй из его вопросов (§ 14.1), так как верна следующая

Теорема. *Преобразование* (14.27) *определенг только на поверхностях кривизны* $-1/a^2$ *и допускается уравнением* (14.26).

Доказательство. Дифференцирование двух первых соотношений из (14.27) и равенства $dz=p\,dx+q\,dy$, $dz'=p'\,dx'+q'\,dy'$ позволяют выразить dx, dy в виде линейных функций от dx', dy' с переменными коэффициентами. Применение аналогичной операции к двум последним соотношениям из (14.27) с учетом предыдущих выражений для dx, dy и уравнений $dp=r\,dx+s\,dy$, $dq=s\,dx+t\,dy$ позволяет выразить dp', dq' как линейные функции от dx', dy'. Полученные выражения приводят к равенству

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial y'}-\frac{\partial q'}{\partial x'}\right)\sigma=s^2-rt-\frac{1+p^2+q^2}{a^2} \tag{14.29}$$

с некоторой функцией σ, зависящей от $x, y, z, p, q, r, s, t, x', y', z', p', q'$. Этим доказана первая часть теоремы, так как из (14.28), (14.29) вытекает уравнение (14.26).

Теперь нужно заметить, что в предыдущих рассуждениях элементы (x, y, z, p, q) и (x', y', z', p', q') можно поменять местами. Принимая во внимание эту симметрию, легко видеть, что поверхность S', полученная путем преобразования (14.27) поверхности S постоянной кривизны $-1/a^2$, также представляет собой поверхность кривизны $-1/a^2$. Это и означает инвариантность уравнения (14.26) относительно преобразования (14.27).

На основе доказанной теоремы с учетом структуры преобразования (14.27) можно, начав с некоторой поверхности постоянной отрицательной кривизны и используя только квадратуры, построить семейство поверхностей той же кривизны. Такая возможность использования многозначных обобщений касательных преобразований Ли для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка была использована в цитированной работе Бианки для поверхностей постоянной кри-

визны специального типа. Эта идея была затем развита Lie [2], который на примере уравнения (14.26) продемонстрировал, что многозначные преобразования поверхностей можно использовать подобно тому, как в его предыдущей теории дифференциальных уравнений использовались контактные и точечные преобразования. В частности, из инвариантности уравнения (14.26) относительно преобразования (14.27) следует, что всякое решение уравнения (14.26) под действием этого преобразования переходит в семейство решений того же уравнения; в данном случае преобразованные решения получаются квадратурами, точнее, как решения вполне интегрируемой системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для $z'(x', y')$, получающейся после подстановки в (14.27) известного решения $z=z(x, y)$ уравнения (14.26) и исключения переменных x и y.

Преобразование, заданное соотношениями (14.27), называется *преобразованием Бианки—Ли* (Anderson & Ibragimov [1, 2]). Обобщение описанной процедуры путем замены соотношений (14.27) произвольными четырьмя уравнениями, связывающими элементы (x, y, z, p, q) и (x', y', z', p', q'), приводит к задаче классификации таких преобразований, которые определены на решениях соответствующих дифференциальных уравнений (Bäcklund [3, 4]). Эта задача, известная в литературе как *проблема Беклунда*, довольно подробно исследована (см., например, Clairin [1], Goursat [1]), но полностью не решена.

14.4. Преобразования Беклунда. Примеры. Bäcklund [5] обобщил результат Бианки на поверхности S, S', получающиеся друг из друга с помощью модифицированного построения Бианки: условие ортогональности касательных плоскостей τ и τ' (см. 2), § 14.3) Беклунд заменил условием постоянства (т. е. независимости от точки M) угла между τ и τ':

2′) $\angle(\tau, \tau') = \text{const}$.

Тогда преобразование Бианки—Ли (14.27) заменяется уравнениями

$$\begin{gathered}(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=a^2,\\ p(x-x')+q(y-y')-(z-z')=0,\\ p'(x-x')+q'(y-y')-(z-z')=0,\\ pp'+qq'+1-b\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}=0.\end{gathered} \tag{14.30}$$

(Геометрический смысл постоянной b указывается ниже в связи с более общими рассмотрениями Дарбу.) Беклунд перенес на преобразование (14.30) теорему Ли: оно определено только для поверхностей постоянной кривизны $-1/a^2$, и преобразованная поверхность S' имеет ту же кривизну. В классической геометрической литературе преобразование (14.30) поверхностей постоянной кривизны называется *преобразованием Беклунда*.

Darboux [1] (стр. 442—444) завершил геометрический анализ построения Бианки. Он заменил условие 3) Бианки требованием, чтобы прямая, соединяющая точки M, M', находилась под постоянным углом как с плоскостью τ, так и с плоскостью τ' (эти два угла не обязательно должны быть равны между собой); условие 2) он также заменил условием Беклунда 2'). В результате получаются уравнения

$$\begin{gathered}(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=a^2,\\ p(x-x')+q(y-y')-(z-z')+ba\sqrt{1+p^2+q^2}=0,\\ p'(x-x')+q'(y-y')-(z-z')+b'a\sqrt{1+p'^2+q'^2}=0,\\ pp'+qq'+1-c\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}=0.\end{gathered} \tag{14.31}$$

Постоянные b, b', c имеют следующий геометрический смысл:

$$b=\sin\angle(MM',\tau),\quad b'=\sin\angle(MM',\tau'),\quad c=\cos\angle(\tau,\tau').$$

Затем Дарбу классифицирует уравнения (14.31), удовлетворяющие условию интегрируемости (14.28), вместе с соответствующими поверхностями S. Результат этой классификации показывает, что на этом пути не достигается существенное обобщение преобразования Бианки—Ли. Так, например, преобразование Беклунда (14.30) отличается от преобразования Бианки—Ли добавлением однопараметрической группы точечных преобразований. Для выяснения этой связи удобнее использовать вместо (14.26) уравнение

$$2z_{xy}=\sin(2z). \tag{14.32}$$

При таком описании поверхностей постоянной кривизны преобразование Бианки—Ли, допускаемое уравнением (14.32), имеет вид ($x'=x$, $y'=y$)

$$z_x+z'_x=\sin(z-z'),\quad z_y-z'_y=\sin(z+z'), \tag{14.33}$$

а преобразование Беклунда задается уравнениями

$$z_x+z'_x=\frac{1}{a}\sin(z-z'),\quad z_y-z'_y=a\sin(z+z') \tag{14.34}$$

с произвольной постоянной $a\neq 0$ (Darboux [1], глава 12; Bianchi [2], § 262). Из инвариантности уравнения (14.32) относительно группы растяжений

$$x'=ax,\quad y'=\frac{1}{a}y \tag{14.35}$$

очевидно, что (14.32) допускает суперпозицию преобразований (14.33) и (14.35); полученное преобразование совпадает с (14.34).

В качестве аналитического обобщения преобразования Бианки—Ли Bäcklund [3] рассмотрел четыре *) соотношения общего

*) Случай пяти соотношений приводит к контактным преобразованиям (Cartan [1]).

вида:

$$F_i(x, y, z, p, q, x', y', z', p', q') = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \quad (14.36)$$

Буквальное повторение рассуждений Ли относительно специальных соотношений (14.27) применительно к общему случаю (14.36) приводит к тому, что называется в литературе преобразованием Беклунда. Вспомним сначала, что в случае соотношений (14.27) Ли решал задачу отыскания семейства поверхностей, на которых может действовать преобразование (14.27). Его результат, выраженный теоремой 14.3, заключается в том, что искомое семейство состоит из поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Если теперь, поступая аналогично в общем случае (14.36), подставить в соотношения (14.36) заданную функцию $z = z(x, y)$ и два из полученных четырех равенств использовать для исключения x, y, то в результате получится переопределенная система двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\begin{aligned} f_1(x', y', z', p', q') &= 0, \\ f_2(x', y', z', p', q') &= 0 \end{aligned} \quad (14.37)$$

для одной функции z'. Условия совместности этой системы имеют вид дифференциальных уравнений для функции $z(x, y)$ и в общей форме записаны в статье Беклунда (Bäcklund [3], стр. 311). Если $z(x, y)$ удовлетворяет условиям совместности, то (14.36) задают преобразование поверхности $z = z(x, y)$ в пространстве (x, y, z) в поверхность в пространстве (x', y', z'), заданную решением $z' = z'(x', y')$ интегрируемой системы (14.37).

В классической литературе в основном изучались преобразования Беклунда для дифференциальных уравнений второго порядка (Clairin [1], Forsyth [1], глава 21, Goursat [1]). В этом случае исключение x', y', z', p', q' сводит соотношения (14.36) к дифференциальному уравнению второго порядка для $z(x, y)$ и, наоборот, исключение величин x, y, z, p, q из (14.36) приводит к уравнению второго порядка для $Z(X, Y)$. В последнее время преобразования Беклунда стали использоваться также для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений более высокого порядка. Преобразования Беклунда интересны в основном своими конкретными приложениями. Рассмотрим некоторые хорошо известные примеры.

Пример 1. Преобразования Бианки—Ли—Беклунда (14.27), (14.34).

Пример 2. (Wahlquist & Estabrook [1], Шабат [1], Lamb [1]). Уравнение Кортевега—де Фриза

$$z_y + 3z_x^2 + z_{xxx} = 0$$

допускает преобразование, заданное уравнениями

$$z_x + z'_x + \frac{1}{2}(z - z')^2 = a, \qquad a = \text{const},$$
$$z_y + z'_y + 2(z_x^2 + z_x z'_x + z_x'^2) - (z - z')(z_{xx} - z'_{xx}) = 0.$$

Пример 3. Для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$z_y + 2z_x^3 + z_{xxx} = 0$$

преобразование Беклунда имеет вид

$$z_x - \varepsilon z'_x - a\sin(z + \varepsilon z') = 0,$$
$$z_y - \varepsilon z'_y + a[(z_{xx} + \varepsilon z'_{xx})\cos(z + \varepsilon z') + (z_x^2 + z_x'^2)\sin(z + \varepsilon z')],$$

где $\varepsilon = \pm 1$, a — произвольная постоянная.

Пример 4 (Lamb [1]). Нелинейное уравнение Шредингера

$$iz_y + z_{xx} + |z|^2 z = 0$$

для комплексной функции z инвариантно относительно преобразования

$$z_x - z'_x = iau - \frac{i}{2}v\tau,$$
$$z_y - z'_y = \frac{\tau}{2}(z_x + z'_x) - aw + \frac{i}{4}u(|u|^2 + |v|^2).$$

Здесь использованы обозначения

$$u = z - z', \quad v = z + z', \quad w = iau - \frac{i}{2}v\tau,$$
$$\tau = i\varepsilon(b - 2|u|^2)^{1/2},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, a, b — вещественные параметры.

Выше рассматривались преобразования, сохраняющие данное дифференциальное уравнение. В следующих примерах приводятся преобразования Беклунда, связывающие решения двух уравнений.

Пример 5. Классический пример такого типа — преобразование Лапласа для линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0, \tag{14.38}$$

где a, b, c — произвольные функции от x, y. Рассматриваются x- и y-преобразования Лапласа, которые задаются уравнениями

$$z' = z_y + az, \quad z'_x = (a_x - c)z - bz_y \tag{14.39}$$

и

$$z' = z_x + bz, \quad z'_y = (b_y - c)z - az_x \tag{14.40}$$

соответственно. Исключение переменной z' из соотношений (14.39) (соответственно из (14.40)) приводит к уравнению (14.38), и каждое из уравнений (14.39) и (14.40) задает преобразование Беклунда,

определенное на решениях уравнения (14.38). Преобразованное уравнение для функции $z'=z'(x, y)$ получается исключением z из уравнений (14.39), если функция $h=a_x+ab-c$, называемая *инвариантом Лапласа* уравнения (14.38), не равна нулю; аналогично можно поступить с y-преобразованием Лапласа (14.40), если второй инвариант Лапласа $k=b_y+ab-c$ отличен от нуля. Полученное уравнение для z' снова представляет собой линейное уравнение второго порядка, которое в общем случае не совпадает с исходным уравнением (14.38).

Пример 6. Уравнение Лиувилля

$$z_{xy}=e^z$$

переводится в линейное уравнение $z'_{xy}=0$ преобразованием Беклунда, заданным уравнениями

$$z_x-z'_x+ae^{\frac{1}{2}(z+z')}=0,$$

$$z_y+z'_y+\frac{2}{a}e^{\frac{1}{2}(z-z')}=0.$$

Эта линеаризация достигается также каждым из следующих преобразований (Жибер, Ибрагимов, Шабат [2]):

$$z=\ln\left(2\frac{z'_xz'_y}{z'^2}\right),\quad z=\ln[2(1+\operatorname{tg}^2z')\,z'_xz'_y].$$

Пример 7. Аналогично предыдущему линеаризуется уравнение

$$z_{xy}+z_ye^{-z}=0.$$

Соответствующее преобразование Беклунда имеет вид (Clairin[1])

$$z_x-z'_x=e^{-z},\quad z_y=e^{z'-z}.$$

Пример 8. Уравнения

$$z_{xy}=\sin z \quad \text{и} \quad z'_{xy}=z'\sqrt{1-z'^2_x}$$

связаны преобразованием

$$z'=z_x,\quad z'_y=\sin z.$$

Пример 9. Уравнение Бюргерса

$$z_y+zz_x+z_{xx}=0$$

переходит в уравнение теплопроводности

$$z'_y+z'_{xx}=0$$

после преобразования Беклунда:

$$z'_x-\frac{1}{2}zz'=0,\quad z_y+\frac{1}{2}(zz')_x=0;$$

первое из соотношений, задающих это преобразование Беклунда, называется также *преобразованием Хопфа—Коула*.

Пример 10. Miura [1] нашел преобразование

$$z_x = \varepsilon(z' + z^2), \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

связывающее решения уравнений

$$z_y - 6z^2 z_x + z_{xxx} = 0 \quad \text{и} \quad z'_y + 6z' z'_x + z'_{xxx} = 0.$$

Lamb [1] построил соответствующее преобразование Беклунда, дополнив преобразование Миуры соотношением

$$z_y = \varepsilon z'_{xx} - 2(zz')_x.$$

14.5. Понятие касательных преобразований бесконечного порядка. Теорема Беклунда о несуществовании касательных преобразований высшего порядка, отличных от продолженных контактных преобразований Ли, не исключает возможность существования преобразований, сохраняющих условия касания бесконечного порядка, когда в уравнениях (14.9) $k = \infty$. Примеры таких преобразований уже давно встречались в литературе, например в связи с обсуждением преобразования Лежандра (см. du Bois-Reymond [1], §§ 76—79). В более общем контексте они рассматриваются в цитированных выше работах Беклунда. В частности, касательные преобразования бесконечного порядка можно получить, исходя из преобразований вида

$$\begin{aligned} x' &= f\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}\right), \\ u' &= \varphi\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}\right) \end{aligned} \tag{14.41}$$

с произвольным $k < \infty$ и определяя преобразование переменных $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots$ путем последовательного дифференцирования u' по x'. При этом возникает естественный и важный в применении к дифференциальным уравнениям (для того, чтобы дифференциальные уравнения высшего порядка можно было преобразовывать без повышения их порядка) вопрос, имеются ли такие преобразования (14.41), которые после их продолжения на величины $\underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}$ будут иметь замкнутый (в конечномерном пространстве переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}$) вид (14.8). Как ожидал Lie [1], таких преобразований, кроме контактных преобразований (14.1), нет (Bäcklund [2]). Мы вернемся к этому утверждению (в виде теоремы 16.1.2 *)) при рассмотрении касательных преобразований бесконечного порядка, образующих группу.

---

*) По существу речь идет об одной теореме Беклунда в ее различных формулировках в виде теорем 14.1, 14.2 и 16.1.2.

Переходя от преобразований вида (14.41) к более общему случаю, можно рассматривать преобразования

$$\begin{aligned} x' &= f\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ u' &= \varphi\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ \underset{1}{u}' &= \underset{1}{\psi}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{14.42}$$

в бесконечномерном пространстве переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots$ Преобразование вида (14.42), сохраняющее бесконечную ($k=\infty$) пфаффову систему (14.9), называется *преобразованием Ли—Беклунда* (Ibragimov & Anderson [1]). Попытка инфинитезимального описания преобразований Ли—Беклунда приводит к рассмотрению бесконечномерного аналога уравнения Ли (3.6). Согласно теореме Беклунда (в форме теоремы 16.1.2) эта бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка сводится к конечномерной системе только для точечных и контактных преобразований Ли (этот вопрос обсуждался также в работе Noether [1], § 3). Указанный факт служит препятствием на пути к построению аналитической теории групп преобразований Ли—Беклунда. Недавно было дано (Ибрагимов [16]) алгебраическое решение вопроса путем отказа от аналитической точки зрения на непрерывные группы и ее замены методом формальных степенных рядов. На этом пути удается построить простую формальную теорию групп преобразований Ли—Беклунда, сохранив основные свойства теории Ли контактных преобразований. Изложению этого материала посвящены §§ 15, 16.

§ 15. Формальные группы

15.1. Уравнение Ли для формальных однопараметрических групп. Рассматривается алгебра формальных степенных рядов от одной переменной с аналитическими коэффициентами. Формальной однопараметрической группой называется элемент этой алгебры, удовлетворяющий специальному («групповому») свойству. Это свойство в дальнейшем удобно использовать в виде некоторых соотношений на коэффициенты формального ряда. Эти соотношения и кладутся в основу определения формальной группы.

Пусть Z — пространство последовательностей $z=(z^i)_{i\geqslant 1}$ переменных z^i, $i=1, 2, \ldots$ Рассматривается последовательность формальных степенных рядов от одного символа a:

$$f^i(z, a)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z)\, a^k, \quad i=1, 2, \ldots, \tag{15.1}$$

коэффициенты которых являются аналитическими функциями от