Переходя от преобразований вида (14.41) к более общему случаю, можно рассматривать преобразования

$$\begin{aligned} x' &= f\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ u' &= \varphi\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ \underset{1}{u}' &= \underset{1}{\psi}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{14.42}$$

в бесконечномерном пространстве переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots$ Преобразование вида (14.42), сохраняющее бесконечную ($k=\infty$) пфаффову систему (14.9), называется *преобразованием Ли—Беклунда* (Ibragimov & Anderson [1]). Попытка инфинитезимального описания преобразований Ли—Беклунда приводит к рассмотрению бесконечномерного аналога уравнения Ли (3.6). Согласно теореме Беклунда (в форме теоремы 16.1.2) эта бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка сводится к конечномерной системе только для точечных и контактных преобразований Ли (этот вопрос обсуждался также в работе Noether [1], § 3). Указанный факт служит препятствием на пути к построению аналитической теории групп преобразований Ли—Беклунда. Недавно было дано (Ибрагимов [16]) алгебраическое решение вопроса путем отказа от аналитической точки зрения на непрерывные группы и ее замены методом формальных степенных рядов. На этом пути удается построить простую формальную теорию групп преобразований Ли—Беклунда, сохранив основные свойства теории Ли контактных преобразований. Изложению этого материала посвящены §§ 15, 16.

§ 15. Формальные группы

15.1. Уравнение Ли для формальных однопараметрических групп. Рассматривается алгебра формальных степенных рядов от одной переменной с аналитическими коэффициентами. Формальной однопараметрической группой называется элемент этой алгебры, удовлетворяющий специальному («групповому») свойству. Это свойство в дальнейшем удобно использовать в виде некоторых соотношений на коэффициенты формального ряда. Эти соотношения и кладутся в основу определения формальной группы.

Пусть Z — пространство последовательностей $z=(z^i)_{i\geqslant 1}$ переменных z^i, $i=1, 2, \ldots$ Рассматривается последовательность формальных степенных рядов от одного символа a:

$$f^i(z, a)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z)\, a^k, \quad i=1, 2, \ldots, \tag{15.1}$$

коэффициенты которых являются аналитическими функциями от

конечного числа переменных z^i, причем разные коэффициенты могут зависеть от разного набора этих переменных. Предполагается, что

$$A_0^i(z) = z^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{15.2}$$

а коэффициенты A_1^i обозначаются через ξ^i:

$$\xi^i(z) = A_1^i(z). \tag{15.3}$$

Формулы (15.1) можно трактовать как преобразование в пространстве Z, переводящее последовательность $z = (z^i)_{i \geqslant 1}$ в последовательность $z' = (z'^i)_{i \geqslant 1}$ переменных

$$z'^i = f^i(z, a). \tag{15.4}$$

Линейная комбинация и произведение формальных степенных рядов вида (15.1), определяемые формулами

$$\lambda\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k a^k\right) + \mu\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k a^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda A_k + \mu B_k)\, a^k,$$

$$\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} A_{k_1} a^{k_1}\right) \cdot \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} B_{k_2} a^{k_2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2=k} A_{k_1} B_{k_2}\right) a^k,$$

снова представляют собой формальные ряды того же вида. Поэтому определена суперпозиция формальных преобразований (15.4)

$$z''^i = f^i(z', b) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z')\, b^k,$$

которая в общем случае переводит формальные степенные ряды z'^i от одного символа a в формальные степенные ряды z''^i от двух символов a, b и т. д. Следующим определением выделяется специальный класс формальных преобразований, для которых не происходит такого увеличения числа символов формальных рядов.

Определение. Последовательность $f(z, a) = (f^i(z, a))_{i \geqslant 1}$ формальных степенных рядов (15.1) называется *формальной однопараметрической группой*, если коэффициенты этих рядов удовлетворяют условиям

$$A_k^i(f(z, a)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!\,l!} A_{k+l}^i(z)\, a^l, \qquad i = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{15.5}$$

Замечание. Формулы (15.5) эквивалентны равенствам (см. также Бухштабер, Мищенко, Новиков [1])

$$f^i(f(z, a), b) = f^i(z, a+b), \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{15.6}$$

Действительно, левые части равенств (15.6) равны

$$f^i(f(z, a), b) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(f(z, a))\, b^k,$$

а правые части (15.6) можно преобразовать следующим образом:

$$f^i(z, a+b) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z)(a+b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z) \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!k_2!} a^{k_1} b^{k_2} =$$

$$= \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!} A_{k_1+k_2}^i(z)\, a^{k_1} b^{k_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} A_{k+l}^i(z)\, a^l \right) b^k. \tag{15.7}$$

Поэтому равенства (15.6) имеют вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(f(z, a))\, b^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} A_{k+l}^i(z)\, a^l \right) b^k,$$

эквивалентный условиям (15.5).

Если ряды (15.1) сходятся, то формулы (15.4) определяют обычную однопараметрическую группу преобразований T_a: $z \mapsto z'$. При этом групповое свойство (15.6) утверждает, что суперпозиция $T_b \circ T_a$ преобразований, соответствующих конкретным значениям a и b группового параметра, равна преобразованию T_{a+b}, соответствующему сумме этих значений. В случае же формальных рядов (15.1) формула (15.6) выражает равенство формальных рядов $f(f(z, a), b)$ от двух символов a, b и формальных рядов $f(z, a+b)$ от одного символа $c = a+b$. Подстановка $b = -a$ в формальных рядах $f(f(z, a), b)$ от двух символов с последующим разложением выражений $f(f(z, a), -a)$ в формальные степенные ряды от a приводит к формальным рядам от одного символа. При этом в соответствии с (15.6) получаются равенства

$$f^i(f(z, a), -a) = z^i, \tag{15.8}$$

которые формально можно трактовать как свойство обратимости формальных преобразований (15.4). Далее, в теории формальных однопараметрических групп можно использовать замену «группового параметра» $a \mapsto \bar{a}$ с помощью подстановки в (15.1) вместо символа a формального ряда $a = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \bar{a}^k$ с вещественными коэффициентами λ_k. В частности, замена $a \mapsto \lambda \bar{a}$ может использоваться для сокращения на общий постоянный множитель коэффициентов (15.3).

Если для формальных степенных рядов $f(z, a) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)\, a^k$ ввести обозначение $f(z, a)|_{a=0} \equiv A_0(z)$, то формулы (15.2) и (15.3)

можно символически записать в виде

$$f^i(z, a)|_{a=0} = z^i, \tag{15.2'}$$

$$\xi^i(z) = \frac{df^i(z, a)}{da}\Big|_{a=0}. \tag{15.3'}$$

Последовательность $\xi(z) = (\xi^i(z))_{i \geqslant 1}$ аналитических функций (15.3′) назовем *касательным векторным полем* формальной однопараметрической группы (15.1). Следующее утверждение переносит на формальные однопараметрические группы теорему Ли о соответствии между локальными однопараметрическими группами преобразований и их касательными векторными полями.

Теорема. *Последовательность формальных рядов* (15.1), *образующая формальную однопараметрическую группу с касательным векторным полем* (15.3′), *удовлетворяет дифференциальным уравнениям*

$$\frac{df^i}{da} = \xi^i(f), \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{15.9}$$

Обратно, для любой последовательности $\xi(z) = (\xi^i(z))_{i \geqslant 1}$ *аналитических функций* $\xi^i(z)$ *от конечного числа переменных* z^i *существует, и притом единственное, решение уравнений* (15.9) *в виде формальных степенных рядов* (15.1) *с «начальными условиями»* (15.2′); *это решение образует формальную однопараметрическую группу, касательное векторное поле которой совпадает с заданной последовательностью* $\xi(z)$.

Доказательство. Пусть последовательность рядов (15.1) образует формальную однопараметрическую группу. По определению производной формального степенного ряда имеем

$$\frac{df^i}{da} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) A^i_{k+1}(z) a^k.$$

С другой стороны, из свойства (15.5) формальной однопараметрической группы вытекают равенства

$$\xi^i(f) \equiv A^i_1(f(z, a)) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) A^i_{k+1}(z) a^k$$

и, следовательно, справедливость уравнений (15.9).

Пусть теперь задана некоторая последовательность $\xi(z)$. Подстановка рядов (15.1) в дифференциальные уравнения (15.9) с учетом начальных условий (15.2) дает рекуррентные формулы для коэффициентов A^i_k. Остается показать, что полученное решение (15.1) задачи (15.9), (15.2′) удовлетворяет условиям (15.5). Для этого рассмотрим следующие две последовательности

формальных рядов:

$$v^i = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i (f(z, a))\, b^k, \tag{15.10}$$

$$w^i = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} A_{k+l}^i (z)\, a^l \right) b^k. \tag{15.11}$$

Так как ряды $f^i(z, a)$ удовлетворяют уравнениям (15.9) и начальным условиям (15.2′), то

$$\frac{dv^i}{db} = \xi^i(v), \quad v^i|_{b=0} \equiv A_0^i (f(z, a)) = f^i(z, a).$$

С другой стороны, согласно тождествам (15.7) ряды w^i можно переписать в виде

$$w^i = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i (z)\, (a+b)^k. \tag{15.11′}$$

Поэтому

$$\frac{dw^i}{d(a+b)} = \xi^i(w).$$

Кроме того, из представления (15.11) рядов w^i следует, что

$$\frac{dw^i}{db} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l+1)!}{k!l!} A_{k+l+1}^i (z)\, a^l \right) b^k,$$

а из представления (15.11′) этих рядов повторным применением (15.7) получаются равенства

$$\frac{dw^i}{d(a+b)} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, A_{k+1}^i (z)\, (a+b)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_{k+1}^i (z) \sum_{k_1+k_2=k} \frac{(k+1)!}{k_1!k_2!} a^{k_1} b^{k_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l+1)!}{k!l!} A_{k+l+1}^i (z)\, a^l \right) b^k.$$

Следовательно, $\frac{dw^i}{db} = \frac{dw^i}{d(a+b)}$, так что последовательность формальных рядов (15.11) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dw^i}{db} = \xi^i(w).$$

Из формул (15.11) видно, что

$$w^i|_{b=0} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} A_l^i (z)\, a^l = f^i(z, a).$$

Таким образом, формальные степенные ряды (15.10) и (15.11) удовлетворяют (по символу b) одной и той же системе дифферен-

циальных уравнений вида (15.9) и одинаковым начальным условиям. Поэтому в силу единственности решения задачи (15.9), (15.2′) ряды (15.10) и (15.11) совпадают, т. е. решение задачи (15.9) и (15.2′) удовлетворяет условиям (15.5). Наконец, совпадение касательного векторного поля полученной формальной однопараметрической группы с исходной последовательностью $\xi(z)$ непосредственно видно из рекуррентных формул.

15.2. Инварианты и инвариантные многообразия. Действие формальных преобразований (15.4) можно распространить на аналитические функции $F(z)$ от произвольного конечного набора переменных z^i формулой $F(z) \mapsto F(z')$. При этом $F(z')$ представляет собой формальный степенной ряд от a. Пусть

$$F(z') = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(z)\, a^k.$$

Коэффициенты этого ряда выражаются через $F(z)$ и коэффициенты рядов (15.1). В частности, в силу (15.2), (15.3),

$$B_0(z) = F(z), \quad B_1(z) = \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i}.$$

Поэтому

$$F(z') = F(z) + a\xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} + a^2 F_1(z, a), \tag{15.12}$$

где $F_1(z, a)$ также является формальным степенным рядом вида (15.1). В принятой выше символической записи

$$F(z')\big|_{a=0} = F(z), \tag{15.13}$$

$$\frac{dF(z')}{da}\bigg|_{a=0} = \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i}. \tag{15.14}$$

Аналитическая функция $F(z)$ называется *инвариантом формальных преобразований* (15.4), если $F(z') = F(z)$.

Теорема 1. *Функция $F(z)$ является инвариантом формальной однопараметрической группы преобразований* (15.4) *тогда и только тогда, когда*

$$\xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = 0. \tag{15.15}$$

Доказательство. Выполнение условия (15.15) для инварианта $F(z)$ обеспечивается формулой (15.14). Пусть теперь $F(z)$ — произвольная аналитическая функция, удовлетворяющая условию (15.15). Поскольку (15.14) — тождество по z, то

$$\xi^i(z') \frac{\partial F(z')}{\partial z'^i} = 0. \tag{15.16}$$

Кроме того,

$$\frac{dF(z')}{da}=\frac{\partial F(z')}{\partial z'^i}\frac{df^i(z,a)}{da},$$

откуда в силу уравнений (15.9) следует, что

$$\frac{dF(z')}{da}=\xi^i(z')\frac{\partial F(z')}{\partial z'^i}. \tag{15.17}$$

Равенства (15.16) и (15.17) показывают, что формальный ряд $F(z')$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dF(z')}{da}=0. \tag{15.18}$$

Так как решение дифференциального уравнения (15.18) при заданном начальном условии (15.13) определено единственным образом, то $F(z')=F(z)$. Теорема доказана.

Аналогично можно доказать формальный аналог инфинитезимального критерия инвариантности многообразий. Рассматривается многообразие $M\subset Z$, заданное системой уравнений

$$\psi_\nu(z)\equiv z^{i_\nu}+\varphi_\nu(\bar z)=0,\qquad \nu=1,\ldots,p, \tag{15.19}$$

где $\varphi_\nu(\bar z)$ — аналитические функции, $z=(z^{i_1},\ldots,z^{i_p},\bar z)$, i_ν — натуральные числа, $p\leqslant\infty$. Многообразие M называется *инвариантным относительно формальных преобразований* (15.4), если для каждого решения $z=(z^i)_{i\geqslant 1}$ уравнений (15.19) преобразованная точка $z'=(f^i(z,a))_{i\geqslant 1}$ также удовлетворяет уравнениям (15.19).

Теорема 2. *Многообразие M, заданное системой уравнений* (15.19), *инвариантно относительно формальной однопараметрической группы преобразований* (15.4) *тогда и только тогда, когда*

$$\xi^i(z)\frac{\partial\psi_\nu(z)}{\partial z^i}=0,\quad \nu=1,\ldots,p,\ \textit{для всех}\ z\in M. \tag{15.20}$$

Доказательство. Если многообразие M инвариантно, то для каждой точки z из M имеем равенства $\psi_\nu(z)=0$ и $\psi_\nu(z')=0$ для всех $\nu=1,\ldots,p$. Поэтому из разложения каждого ряда $\psi_\nu(z')$ по формуле (15.12)

$$\psi_\nu(z')=\psi_\nu(z)+a\xi^i(z)\frac{\partial\psi_\nu(z)}{\partial z^i}+a^2\psi_{1\nu}(z,a)$$

следует выполнение (15.20).

Пусть теперь многообразие M удовлетворяет условиям (15.20). Рассмотрим произвольную точку $z=(z^i)_{i\geqslant 1}$ из M и ее образ $z'=(f^i(z,a))_{i\geqslant 1}$. Согласно формулам (15.17), (15.13), (15.19) формальные ряды $\psi_\nu(z')$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\psi_\nu(z')}{da}=\xi^i(z')\frac{\partial\psi_\nu(z')}{\partial z'^i},\qquad \nu=1,\ldots,p, \tag{15.21}$$

и начальным условиям

$$\psi_\nu(z')|_{a=0}=0, \qquad \nu=1, \ldots, p. \tag{15.22}$$

Так как $\psi_\nu(z')$ и правые части уравнений (15.21) являются аналитическими функциями от z', решение задачи (15.21), (15.22) в виде формальных степенных рядов от a определяется по рекуррентным формулам и, следовательно, единственно. Это единственное решение равно нулю: $\psi_\nu(z')=0$, $\nu=1, \ldots, p$. Действительно, согласно условиям (15.20) правые части равенств (15.21) обращаются в нуль при $\psi_\nu(z')=0$, и поэтому тождественно равные нулю ряды $\psi_\nu(z')$ удовлетворяют всем условиям задачи (15.21), (15.22). Следовательно, образ z' каждой точки $z\in M$ удовлетворяет (15.19), т. е. $z'\in M$.

§ 16. Однопараметрические группы преобразований Ли — Беклунда

16.1. Определение и инфинитезимальный критерий. Пусть пространство Z представлено в виде прямого произведения

$$Z=\mathbb{R}^n\times V, \tag{16.1}$$

где $V=\sum\limits_{s\geqslant 0}V^s$ является градуированным векторным пространством с конечномерными однородными компонентами V^s. Элементы пространства V задаются своими координатами: u^α — координаты однородных элементов нулевой степени, $u^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ — координаты однородных элементов степени $s\geqslant 1$, причем величины $u^\alpha_{i_1\cdots i_s}$ при $s\geqslant 2$ симметричны по нижним индексам. Здесь $\alpha=1, \ldots, m$; $i_1, \ldots, i_s=1, \ldots, n$. В обозначениях $x=(x^1, \ldots, x^n)\in\mathbb{R}^n$ и $y=(u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots)\in V$ с $u=(u^1, \ldots, u^m)\in V^0$, $\underset{s}{u}=\{u^\alpha_{i_1\cdots i_s}|\alpha=1, \ldots, m; i_1, \ldots, i_s=1, \ldots, n\}\in V^s$ точки $z=(z^1, z^2, \ldots)\in Z$ представляются в виде $z=(x, y)=(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots)$. В пространстве Z формулами

$$D_i(x^j)=\delta^j_i \quad \text{(символ Кронекера)},$$
$$D_i(u^\alpha)=u^\alpha_i, \quad D_i(u^\alpha_{i_1\cdots i_s})=u^\alpha_{ii_1\cdots i_s}, \qquad s=1, 2, \ldots, \tag{16.2}$$

определяются дифференцирования D_i, $i=1, \ldots, n$, действие которых распространяется на функции, зависящие от любого конечного набора переменных *) x^i, u^α, $\ldots$, $u^\alpha_{i_1\cdots i_s}$ путем отождествления D_i с дифференциальным оператором первого порядка

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+u^\alpha_i\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+u^\alpha_{ii_1}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1}}+u^\alpha_{ii_1i_2}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1i_2}}+\ldots \tag{16.3}$$

*) Речь идет, таким образом, о функциях от обычных переменных x^i и дифференциальных переменных u^α (см. Ritt [1]).