и начальным условиям

$$\psi_\nu(z')|_{a=0}=0, \qquad \nu=1, \ldots, p. \tag{15.22}$$

Так как $\psi_\nu(z')$ и правые части уравнений (15.21) являются аналитическими функциями от z', решение задачи (15.21), (15.22) в виде формальных степенных рядов от a определяется по рекуррентным формулам и, следовательно, единственно. Это единственное решение равно нулю: $\psi_\nu(z')=0$, $\nu=1, \ldots, p$. Действительно, согласно условиям (15.20) правые части равенств (15.21) обращаются в нуль при $\psi_\nu(z')=0$, и поэтому тождественно равные нулю ряды $\psi_\nu(z')$ удовлетворяют всем условиям задачи (15.21), (15.22). Следовательно, образ z' каждой точки $z\in M$ удовлетворяет (15.19), т. е. $z'\in M$.

§ 16. Однопараметрические группы преобразований Ли — Беклунда

16.1. Определение и инфинитезимальный критерий. Пусть пространство Z представлено в виде прямого произведения

$$Z=\mathbb{R}^n\times V, \tag{16.1}$$

где $V=\sum\limits_{s\geqslant 0}V^s$ является градуированным векторным пространством с конечномерными однородными компонентами V^s. Элементы пространства V задаются своими координатами: u^α — координаты однородных элементов нулевой степени, $u^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ — координаты однородных элементов степени $s\geqslant 1$, причем величины $u^\alpha_{i_1\cdots i_s}$ при $s\geqslant 2$ симметричны по нижним индексам. Здесь $\alpha=1, \ldots, m$; $i_1, \ldots, i_s=1, \ldots, n$. В обозначениях $x=(x^1, \ldots, x^n)\in\mathbb{R}^n$ и $y=(u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots)\in V$ с $u=(u^1, \ldots, u^m)\in V^0$, $\underset{s}{u}=\{u^\alpha_{i_1\cdots i_s}|\alpha=1, \ldots, m; i_1, \ldots, i_s=1, \ldots, n\}\in V^s$ точки $z=(z^1, z^2, \ldots)\in Z$ представляются в виде $z=(x, y)=(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots)$. В пространстве Z формулами

$$D_i(x^j)=\delta^j_i \quad \text{(символ Кронекера)},$$
$$D_i(u^\alpha)=u^\alpha_i, \quad D_i(u^\alpha_{i_1\cdots i_s})=u^\alpha_{ii_1\cdots i_s}, \qquad s=1, 2, \ldots, \tag{16.2}$$

определяются дифференцирования D_i, $i=1, \ldots, n$, действие которых распространяется на функции, зависящие от любого конечного набора переменных *) x^i, u^α, $\ldots$, $u^\alpha_{i_1\cdots i_s}$ путем отождествления D_i с дифференциальным оператором первого порядка

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+u^\alpha_i\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+u^\alpha_{ii_1}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1}}+u^\alpha_{ii_1i_2}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1i_2}}+\ldots \tag{16.3}$$

*) Речь идет, таким образом, о функциях от обычных переменных x^i и дифференциальных переменных u^α (см. Ritt [1]).

Пусть $T(Z)$ — касательное расслоение пространства Z, а $Z_z = \mathbb{R}^n_x \times V_y$ — касательное пространство к Z в точке $z=(x, y)$, элементы которого обозначаются $dz=(dx, dy)$, где $dx \in \mathbb{R}^n_x$, $dy \in V_y$. Пространство Z_z удобно отождествлять с другим экземпляром пространства Z; пусть V^s_y $(s=0, 1, 2, \ldots)$ — однородные компоненты пространства V_y, градуированного отождествлением V_y с V. При этом элементы dy из V_y записываются в виде $dy=(du, \underset{1}{du}, \ldots)$, где однородные элементы du, $\underset{s}{du}$, $s \geqslant 1$, имеют соответственно координаты du^α, $du^\alpha_{i_1 \ldots i_s}$. Теперь в каждом пространстве V^s_y $(s=0, 1, 2, \ldots)$ выделяется подпространство, порожденное элементами вида

$$du^\alpha = u^\alpha_i dx^i; \quad du^\alpha_{i_1 \ldots i_s} = u^\alpha_{i i_1 \ldots i_s} dx^i,$$

где dx^i — координаты произвольного вектора dx из $\mathbb{R}^n_x$. В результате получается подрасслоение касательного расслоения $T(Z)$, представляющее собой n-мерное (т. е. имеющее n-мерный слой) векторное расслоение над Z; будем называть его *касательной структурой* (бесконечного порядка) и обозначать символом Z^T. Таким образом, касательная структура Z^T определяется бесконечной системой уравнений

$$\Omega: \omega = 0, \quad \underset{s}{\omega} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{16.4}$$

где ω, $\underset{1}{\omega}$, $\ldots$ — дифференциальные формы, определенные в (14.10).

Пусть G — группа Ли. Векторное расслоение F над пространством B называется *векторным G-расслоением над G-пространством B*, если: 1) определено непрерывное действие группы G на пространствах F и B; 2) проекция $F \mapsto B$ согласована с действием группы G на пространствах F и B; 3) для любой точки $b \in B$ каждый элемент g группы G задает линейное отображение слоя F_b над b в слой $F_{g(b)}$ над $g(b)$. Это понятие очевидным образом переформулируется на случай локальной (а также формальной) группы G.

Рассмотрим теперь формальную однопараметрическую группу G преобразований

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i(z, a), \\ u'^\alpha &= \varphi^\alpha(z, a), \\ u'^\alpha_{i_1 \ldots i_s} &= \psi^\alpha_{i_1 \ldots i_s}(z, a), \qquad s = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{16.5}$$

в пространстве $Z = \mathbb{R}^n \times V$. Здесь согласно § 15.1 $f^i(z, a)$, $\varphi^\alpha(z, a)$, $\psi^\alpha_{i_1 \ldots i_s}(z, a)$ представляют собой формальные степенные ряды от a, коэффициенты которых являются аналитическими функциями

конечного числа переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots$ Касательное расслоение $T(Z)$ становится векторным G-расслоением над G-пространством Z, если действие формальной группы G распространить на элементы касательного пространства формулами

$$dx'^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial f^i}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial f^i}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j + \ldots,$$

$$du'^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j + \ldots, \tag{16.6}$$

$$du'^\alpha_{i_1\ldots i_s} = \frac{\partial \psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j + \ldots, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Правые части равенств (16.6) содержат только конечное число отличных от нуля слагаемых и являются формальными степенными рядами от a с аналитическими коэффициентами, зависящими от конечного числа переменных $x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, dx, du, \underset{1}{du}, \underset{2}{du}, \ldots$ Таким образом, преобразования (16.6) имеют ту же природу, что и (16.5).

Определение. Формальное преобразование (16.5) называется *преобразованием Ли — Беклунда*, если касательная структура (16.4) инвариантна относительно преобразований (16.5), (16.6).

Замечание. Если G — формальная однопараметрическая группа преобразований Ли — Беклунда, то ввиду инвариантности уравнений (16.4) относительно преобразований (16.5), (16.6) определено действие группы G на касательной структуре Z^T. При этом Z^T представляет собой векторное G-расслоение над G-пространством Z. Указанное свойство можно было бы взять в качестве определения группы Ли — Беклунда. Такое определение допускает очевидное геометрическое обобщение: пусть F — бесконечномерное векторное расслоение, локально устроенное как тривиальное расслоение (16.1), а F^T — соответствующая касательная структура (т. е. n-мерное подрасслоение касательного расслоения $T(F)$, локально задаваемое уравнениями (16.4)). Группа G, действующая на F, называется *группой Ли — Беклунда*, если F^T является векторным G-расслоением над G-пространством F относительно действия группы G на F^T, индуцированного продолжением G на касательное расслоение $T(F)$.

Пусть G — формальная однопараметрическая группа преобразований (16.5). Согласно формуле (15.3′) касательное векторное поле группы G имеет вид

$$\Xi = (\xi^i, \eta^\alpha, \zeta^\alpha_{i_1}, \zeta^\alpha_{i_1 i_2}, \ldots), \tag{16.7}$$

где

$$\xi^i = \frac{df^i}{da}\Big|_{a=0}, \quad \eta^\alpha = \frac{d\varphi^\alpha}{da}\Big|_{a=0}, \quad \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s} = \frac{d\psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{da}\Big|_{a=0}. \tag{16.8}$$

Рассмотрим теперь действие группы G на касательном расслоении $T(Z)$, заданное формулами (16.5), (16.6). Касательным полем этого продолженного действия группы G является последовательность

$$\tilde{\Xi}=(\Xi,\ \tilde{\xi}^i,\ \tilde{\eta}^\alpha,\ \tilde{\zeta}^\alpha_{i_1}, \tilde{\zeta}^\alpha_{i_1 i_2},\ \ldots). \tag{16.9}$$

Дополнительные к (16.7) координаты $\tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^\alpha$, $\tilde{\zeta}^\alpha_{i_1}$, ... поля (16.9) определяются формулами

$$\tilde{\xi}^i=\frac{d(dx'^i)}{da}\bigg|_{a=0},\quad \tilde{\eta}^\alpha=\frac{d(du'^\alpha)}{da}\bigg|_{a=0},\quad \tilde{\zeta}^\alpha_{i_1\ldots i_s}=\frac{d\left(du'^\alpha_{i_1\ldots i_s}\right)}{da}\bigg|_{a=0}$$

и в силу (16.6), (16.8) равны

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}^i&=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta}du^\beta+\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta_j}du^\beta_j+\ldots,\\
\tilde{\eta}^\alpha&=\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta_j}du^\beta_j+\ldots,\\
\tilde{\zeta}^\alpha_{i_1\ldots i_s}&=\frac{\partial\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta}du^\beta+\frac{\partial\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta_j}du^\beta_j+\ldots
\end{aligned} \tag{16.10}$$

Согласно теореме 15.1 каждому векторному полю (16.7) соответствует формальная однопараметрическая группа преобразований вида (16.5). Следующая теорема выделяет те векторные поля, которым соответствуют группы преобразований Ли—Беклунда, и тем самым дает инфинитезимальную характеристику преобразований Ли—Беклунда (Ibragimov & Anderson [1]).

Теорема 1. *Формальная однопараметрическая группа G является группой преобразований Ли—Беклунда тогда и только тогда, когда ее касательное векторное поле Ξ удовлетворяет условиям*

$$\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}=D_{i_1}\ldots D_{i_s}(\eta^\alpha-\xi^j u^\alpha_j)+\xi^j u^\alpha_{ji_1\ldots i_s},\qquad s=1,2,\ldots \tag{16.11}$$

Доказательство. В силу теоремы 15.2.2 условие инвариантности уравнений (16.4) относительно преобразований (16.5), (16.6) имеет вид

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\eta}^\alpha-u^\alpha_i\tilde{\xi}^i-\zeta^\alpha_i dx^i)_\Omega=0,\\
&(\tilde{\zeta}^\alpha_{i_1\ldots i_s}-u^\alpha_{ii_1\ldots i_s}\tilde{\xi}^i-\zeta^\alpha_{ii_1\ldots i_s}dx^i)_\Omega=0,\qquad s=1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{16.12}$$

Подстановка формул (16.10) в уравнения (16.12) с последующей заменой величин du^α, $du^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ выражениями $u^\alpha_i dx^i$, $u^\alpha_{ii_1\ldots i_s}dx^i$ в соответствии с уравнениями (16.4) приводит уравнения (16.12) к виду (16.11).

В соответствии с этой теоремой векторное поле Ξ группы преобразований Ли—Беклунда определяется координатами $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta=(\eta^1, \ldots, \eta^m)$, которые могут быть произвольными

аналитическими функциями. Координаты $\zeta^\alpha_{i_1}$, $\zeta^\alpha_{i_1 i_2}$, ... определяются формулами «продолжения» (16.11). Имея это в виду и используя стандартную трактовку векторов (16.7) как дифференциальных (или инфинитезимальных) операторов

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geqslant 1} \zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}}, \tag{16.13}$$

касательные векторные поля групп преобразований Ли—Беклунда можно записывать в сокращенном виде:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \ldots \tag{16.14}$$

В дальнейшем они называются *операторами Ли—Беклунда*, а бесконечная система дифференциальных уравнений первого порядка (15.9), соответствующая оператору Ли—Беклунда (16.7), (16.11), называется *уравнением Ли—Беклунда*. Следующая теорема (Ibragimov & Anderson [1]), обобщающая рассмотрения Беклунда (Bäcklund [2]) показывает, что уравнение Ли—Беклунда сводится к конечномерной системе только для групп точечных и контактных преобразований.

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли—Беклунда, Ξ — ее касательное векторное поле. Если координаты ξ^i, η^α, $\zeta^\alpha_{i_1}$, ..., $\zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ поля Ξ зависят только от переменных x, u, $\underset{1}{u}$, ..., $\underset{k}{u}$, то G является группой точечных или контактных преобразований.*

Доказательство. Пусть сначала $k=1$. Так как ζ^α_i зависит только от x, u, $\underset{1}{u}$, то первое из уравнений (16.11)

$$\zeta^\alpha_i = D_i(\eta^\alpha) - u^\alpha_j D_i(\xi^j)$$

с учетом формулы

$$D_i(\eta^\alpha) - u^\alpha_j D_i(\xi^j) = \\ = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^i} + u^\beta_i \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} - u^\alpha_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + u^\beta_i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta} \right) + u^\beta_{ik} \left(\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta_k} - u^\alpha_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta_k} \right)$$

приводит к уравнениям (14.3), (14.4). Отсюда следует утверждение теоремы в случае $k=1$.

Пусть теперь $k>1$. В этом случае нужно рассмотреть первые k уравнений системы (16.11):

$$\zeta^\alpha_i = D_i(\eta^\alpha) - u^\alpha_j D_i(\xi^j),$$

$$\zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_{s+1}} = D_{i_{s+1}}(\zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_s}) - u^\alpha_{j i_1 \ldots i_s} D_{i_{s+1}}(\xi^j), \qquad s = 1, \ldots, k-1.$$

Правые части этих уравнений можно записать, используя «усеченные» операторы дифференцирования $\underset{k-1}{D_i}$ (формула (14.15)), в

виде

$$D_i(\eta^\alpha)-u_j^\alpha D_i(\xi^j)=$$
$$=\underset{k-1}{D_i}(\eta^\alpha)-u_j^\alpha \underset{k-1}{D_i}(\xi^j)+u^\beta_{ii_1\ldots i_k}\left(\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta_{i_1\ldots i_k}}-u_j^\alpha\frac{\partial\xi^j}{\partial u^\beta_{i_1\ldots i_k}}\right),$$

$$D_{i_{s+1}}(\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s})-u^\alpha_{ji_1\ldots i_s}D_{i_{s+1}}(\xi^j)=$$
$$=\underset{k-1}{D_{i_{s+1}}}(\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s})-u^\alpha_{ji_1\ldots i_s}\underset{k-1}{D_{i_{s+1}}}(\zeta^j)+$$
$$+u^\beta_{i_{s+1}j_1\ldots j_k}\left(\frac{\partial\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta_{j_1\ldots j_k}}-u^\alpha_{ji_1\ldots i_s}\frac{\partial\xi^j}{\partial u^\beta_{j_1\ldots j_k}}\right),$$

где члены, содержащие $\underset{k-1}{D}$, не зависят от $\underset{k+1}{u}$. В силу этих соотношений и условия теоремы о том, что величины $\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}$, $s=1, \ldots, k$, зависят только от переменных x, u, $\underset{1}{u}$, $\ldots$, $\underset{k}{u}$, рассматриваемые k уравнений приводят к равенствам (14.16), (14.17). Поэтому доказательство завершается теми же рассуждениями, что и доказательство теоремы 14.2.

16.2. Операторы Ли — Беклунда. Канонический оператор. Как говорилось выше, оператором Ли — Беклунда называется векторное поле (16.7) (или соответствующий ему дифференциальный оператор первого порядка (16.13)), удовлетворяющее условию (16.11); операторы Ли — Беклунда записываются сокращенно в виде (16.14).

Лемма 1. *Оператор Ли — Беклунда* (16.14) *удовлетворяет коммутационному соотношению*

$$XD_i-D_iX=-D_i(\xi^j)D_j. \tag{16.15}$$

Доказательство. Равенство (16.15) устанавливается прямым вычислением.

Лемма 2. *Оператор*

$$X_*=\xi^i_*D_i\equiv\xi^i_*\frac{\partial}{\partial x^i}+\xi^i_*u^\alpha_i\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots \tag{16.16}$$

с произвольными аналитическими коэффициентами $\xi^i_*=\xi^i_*(z)$ *является оператором Ли — Беклунда. Множество операторов* (16.16) *образует идеал в алгебрг Ли всех операторов Ли — Беклунда с умножением* $[X, Y]\equiv XY-YX$.

Доказательство. Первая часть утверждения, т. е. справедливость соотношений (16.11) для любого оператора вида (16.16), очевидна. Вторая часть утверждения следует из коммутационного соотношения

$$[X, X_*]=(X(\xi^i_*)-X_*(\xi^i))D_i,$$

справедливого в силу предыдущей леммы.

Часто вместо алгебры произвольных операторов Ли—Беклунда бывает удобнее использовать факторалгебру по указанному в лемме 2 идеалу L_*, состоящему из операторов вида (16.16). В соответствии с этим два оператора Ли—Беклунда X и Y называются *эквивалентными*, если $X-Y\in L_*$. В частности, всякий оператор (16.14) эквивалентен некоторому оператору Ли—Беклунда с координатами $\xi^i=0$ $(i=1, \ldots, n)$; а именно,

$$X \backsim Y = X-\xi^i D_i = (\eta^\alpha-\xi^i u_i^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots \tag{16.17}$$

Операторы Ли—Беклунда вида

$$X=\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots \tag{16.18}$$

будут называться *каноническими операторами*. Для них формулы продолжения (16.11) имеют простой вид:

$$\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}=D_{i_1}\ldots D_{i_s}(\eta^\alpha). \tag{16.19}$$

Из леммы 1 следует, что канонические операторы Ли—Беклунда коммутируют с дифференцированием D_i. Обратно, перестановочность оператора (16.13) (при $\xi=0$) с дифференцированиями D_i приводит к выполнению условий (16.19) и, следовательно, может быть положена в основу определения преобразований Ли—Беклунда.

Переход от (16.14) к эквивалентному каноническому оператору (16.18), удобный во многих вопросах, в некоторых случаях приводит к потере геометрической наглядности. В первую очередь это относится к группам точечных и контактных преобразований. Например, инфинитезимальный оператор $X=\frac{\partial}{\partial x^i}$ однопараметрической группы простейших преобразований — переносов $x'^i=x^i+a$ вдоль координатной оси x^i — после перехода к канонической форме (16.18) имеет вид $Y=u_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots$; соответствующее этому оператору формальное преобразование Ли—Беклунда будет выписано в § 16.3. Поэтому полезно выделить те операторы Ли—Беклунда, которые эквивалентны инфинитезимальным операторам групп точечных и контактных преобразований.

Теорема. *Оператор Ли—Беклунда* (16.14) *эквивалентен инфинитезимальному оператору группы точечных преобразований тогда и только тогда, когда*

$$\xi^i=\xi_1^i(x, u)+\xi_2^i(z), \quad \eta^\alpha=\eta_1^\alpha(x, u)+[\xi_2^i(z)+\xi_3^i(x, u)]u_i^\alpha, \tag{16.20}$$

где $\xi_1^i(x, u)$, $\xi_2^i(z)$, $\xi_3^i(x, u)$, $\eta_1^\alpha(x, u)$ — *произвольные функции. При* $m=1$ *операторы* (16.14), *эквивалентные операторам групп*

контактных преобразований Ли, характеризуются условиями

$$\xi^i = \xi_1^i\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right) + \xi_2^i(z), \quad \eta = \eta_1\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right) + \xi_2^i(z)\,u_i. \quad (16.21)$$

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Чтобы доказать ее вторую часть, достаточно показать, что любой оператор Ли—Беклунда вида

$$X = \xi^i\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots \quad (16.22)$$

эквивалентен оператору (14.5), (14.6) с некоторой функцией $W = W\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$. В качестве такой функции W можно взять $W = \eta - \xi^i u_i$, где ξ^i, η — координаты рассматриваемого оператора (16.22). Действительно, при указанном выборе функции W выполняется равенство

$$X - Y = \left(\xi^i + \frac{\partial W}{\partial u_i}\right) D_i,$$

где

$$Y = -\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(W - u_i\frac{\partial W}{\partial u_i}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i\frac{\partial W}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial u_i}. \quad (16.23)$$

16.3. Примеры. Рассматриваются простые примеры однопараметрических групп преобразований Ли—Беклунда в случае $m = n = 1$; величина $\underset{s}{u}$ обозначается u_s.

Пример 1. Пусть в операторе (16.18) $\eta = u_1$. Для построения соответствующего формального преобразования (16.5) надо решить уравнение Ли—Беклунда

$$\frac{du'}{da} = u_1', \quad \frac{du_s'}{da} = u_{s+1}', \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,$$

при начальных условиях

$$u'|_{a=0} = u, \quad u_s'|_{a=0} = u_s, \quad s = 1,\ 2,\ \ldots$$

Для решения указанной задачи достаточно построить формальный степенной ряд

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots)\,a^k, \quad A_0 = u,$$

удовлетворяющий уравнению

$$\frac{du'}{da} = D(u'), \quad (16.24)$$

где $D = \sum_{s=0}^{\infty} u_{s+1}\frac{\partial}{\partial u_s}$. При этом переменная x не преобразуется, а значения преобразованных величин u_1', u_2', ... находятся

дифференцированием:

$$u_1' = D(u'), \quad u_2' = D^2(u'), \quad \ldots$$

Подстановка ряда u' в уравнение (16.24) дает рекуррентную формулу

$$(k+1)\,A_{k+1} = D(A_k), \qquad A_0 = u$$

для определения коэффициентов искомого ряда u'. В результате получается следующая формальная однопараметрическая группа:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{k!} a^k, \quad u_s' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{k+s}}{k!} a^k, \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots \tag{16.25}$$

Ее касательное векторное поле $X = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \ldots$ эквивалентно, как уже отмечалось, оператору $Y = \frac{\partial}{\partial x}$ группы переносов $x' = x + a$, $u' = u$.

Пример 2. Обобщая предыдущий пример, возьмем оператор

$$X = u_p \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{16.26}$$

где p — произвольное натуральное число. В этом случае вместо (16.24) берется уравнение

$$\frac{du'}{da} = D^p(u'),$$

откуда для отыскания формального преобразования $u' = \sum_{k=0}^{\infty} A_k a^k$ получается рекуррентная формула

$$(k+1)\,A_{k+1} = D^p(A_k), \qquad A_0 = u.$$

Таким образом, группа Ли — Беклунда, порожденная оператором (16.26), задается следующим формальным преобразованием:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{pk}}{k!} a^k, \quad u_s' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{pk+s}}{k!} a^k, \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots \tag{16.27}$$

Нетрудно выяснить, когда эти ряды сходятся, т. е. когда формулы (16.27) задают обычную (аналитическую) однопараметрическую группу преобразований. Пусть ряд u' в (16.27) сходится в круге $|a| \leqslant r$. Тогда последовательность $(u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots)$ удовлетворяет неравенствам

$$|u_{pk}| \leqslant Ck!\,r^{-k}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad C = \text{const}. \tag{16.28}$$

При выполнении условий (16.28) преобразованная последовательность $(u',\ u_1',\ u_2',\ \ldots)$ снова удовлетворяет неравенствам вида (16.28). Действительно, для $|a| < r$ использование (16.27) и (16.28)

дает

$$|u'_{ps}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a|^k}{k!} |u_{p\,(k+s)}| \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+s)!}{k!} \left(\frac{|a|}{r}\right)^k r^{-s} =$$

$$= Cr^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+s)!}{k!} b^k = Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+s} =$$

$$= Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} b^k = Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \frac{1}{1-b} = Cr^{-s} \frac{s!}{(1-b)^{s+1}} =$$

$$= C \frac{r}{r-|a|} s! (r-|a|)^{-s} \leqslant Cs! r_1^{-s}, \qquad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Следовательно, группа Ли—Беклунда (16.27) действует как обычная группа преобразований в классе целых функций $u=u(x)$, определенном условиями (16.28). Этот класс совпадает с семейством всех аналитических функций только при $p=1$.

Пример 3. Для оператора $X=u_1^2 \frac{\partial}{\partial u} + \ldots$ построение преобразований Ли—Беклунда осуществляется с помощью рекурренции

$$(k+1) A_{k+1} = \sum_{i+j=k} D(A_i) \cdot D(A_j), \qquad A_0 = u.$$

В соответствии с теоремой 16.2 рассматриваемый оператор X эквивалентен оператору

$$Y = -2u_1 \frac{\partial}{\partial x} - u_1^2 \frac{\partial}{\partial u},$$

порождающему группу контактных преобразований

$$x' = x - 2u_1 a, \quad u' = u - u_1^2 a, \quad u'_1 = u_1.$$

§ 17. Инвариантные дифференциальные многообразия

17.1. Критерий инвариантности. Основное пространство Z здесь также имеет вид (16.1). Пусть $F=(F^1, \ldots, F^p)$ — аналитическая функция от $x=(x^1, \ldots, x^n)$ и дифференциальной переменной $u=(u^1, \ldots, u^m)$, т. е. $F=F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})$, где $s \geqslant 1$ — некоторое натуральное число. Символом $\underset{\nu}{F}$ обозначается совокупность функций $D_{i_1} \ldots D_{i_\nu}(F)$. Уравнение порядка s

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0 \tag{17.1}$$

рассматривается вместе со всеми дифференциальными следствиями и тем самым порождает (бесконечномерное) многообразие $[F] \subset Z$,