В этом случае вместо (19.44a)—(19.44d), (19.46) используются следующие формулы:

$$D_x = D_x(\varphi) D_y + D_x(\psi) D_s, \qquad D_t = D_t(\varphi) D_y + D_t(\psi) D_s,$$
$$D_x(\Phi) = v_1 D_x(\varphi) + v_s D_x(\psi), \qquad v_{i+1} = D_y(v_i),$$
$$D_t(\Phi) = v_1 D_t(\varphi) + v_s D_t(\psi),$$
$$\tilde{f} = (\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) f, \qquad f \in \mathcal{A},$$
$$\tilde{L}(\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) = (\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) L.$$

В следующем параграфе подробно рассматриваются случаи $m=2$ и 3 для иллюстрации описанного выше метода групповой классификации.

§ 20. Анализ эволюционных уравнений второго и третьего порядка

20.1. $m=2$. В соответствии с теоремой 19.3 и леммой 19.3.2 для групповой классификации уравнений

$$u_t = F(u, u_1, u_2) \tag{20.1}$$

используется соотношение (19.23) с оператором

$$L = F_* + \alpha D + \beta + \gamma D^{-1} + \ldots, \tag{20.2}$$

коэффициенты α, β, γ, ... которого принадлежат $\mathcal{A}$ и могут зависеть от t, x. Так как в данном случае

$$L_t - [F_*, L] = \left(\frac{dF_2}{dt} - 2F_2 D\alpha + \alpha D F_2\right) D^2 +$$
$$+ \left(\frac{d(F_1+\alpha)}{dt} - F_2 D^2\alpha - 2F_2 D\beta - F_1 D\alpha + \alpha D F_1\right) D +$$
$$+ \left(\frac{d(F_0+\beta)}{dt} - F_2 D^2\beta - 2F_2 D\gamma - F_1 D\beta + \alpha D F_0 - \gamma D F_2\right) + \ldots,$$

равенство (19.23) приводит к уравнениям

$$\frac{dF_2}{dt} - 2F_2 D\alpha + \alpha D F_2 = 0, \tag{20.3}$$

$$\frac{d(F_1+\alpha)}{dt} - F_2 D^2\alpha - 2F_2 D\beta - F_1 D\alpha + \alpha D F_1 = 0, \tag{20.4}$$

$$\frac{d(F_0+\beta)}{dt} - F_2 D^2\beta - 2F_2 D\gamma - F_1 D\beta + \alpha D F_0 - \gamma D F_2 = 0 \tag{20.5}$$

между функцией F и коэффициентами α, β, γ.

Условие разрешимости уравнения (20.3) (см. (19.35)),

$$\frac{\delta}{\delta u} \frac{dF_2^{-1/2}}{dt} = 0, \tag{20.6}$$

является первым необходимым условием нетривиальности алгебры $\mathcal{A}_F$. Второе необходимое условие,

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{dF_2^{-1}F_1}{dt}+F_2^{-1}\frac{d\alpha}{dt}\right)=0, \tag{20.7}$$

следует из уравнения (20.4), записанного с использованием (20.3) в виде

$$\frac{dF_2^{-1}F_1}{dt}+F_2^{-1}\frac{d\alpha}{dt}=D\,(D\alpha+2\beta-\alpha F_2^{-1}F_1).$$

В (20.7) величина α считается известной функцией, найденной из уравнения (20.3). Остальные необходимые условия в общем виде далее не используются.

С помощью условия (20.6) легко показать, что F является рациональной функцией от переменной u_2. Для этого достаточно выделить старший член левой части (20.6). Имеем

$$\frac{dF_2^{-1/2}}{dt}=-\frac{1}{2}\,(F_2^{-1/2}F_{22}u_4+F_2^{-3/2}F_{22}^2\,u_3^2)+\ldots$$

и соответственно

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dF_2^{-1/2}}{dt}=\frac{1}{2}\,F_2^{-3/2}\,(3F_{22}^2-2F_2F_{222})\,u_6\,(\mathrm{mod}\,u_5).$$

Поэтому из равенства (20.6) следует обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $3\,(F_{22})^2-2F_2\cdot F_{222}=0$ для сепаранты F_2 функции F, откуда

$$F_2=(\varphi u_2+\psi)^{-2},\quad \text{если}\quad F_{22}\neq 0, \tag{20.8}$$

или

$$F=\varphi u_2+\psi, \tag{20.9}$$

где функции φ и ψ зависят только от переменных u, u_1.

При подстановке (20.8) и (20.9) в левую часть (20.6) коэффициенты при u_5 и u_4^2 также обращаются в нуль, так что старший член функции $\dfrac{\delta}{\delta u}\dfrac{dF_2^{-1/2}}{dt}$ линейно зависит от u_4. В частности, в случае (20.9)

$$\frac{dF_2^{-1/2}}{dt}=-\frac{1}{2}\,(\varphi^{-1/2}\varphi_1u_3+\varphi^{-3/2}\varphi_1^2u_2^2)+\ldots,$$

и поэтому

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dF_2^{-1/2}}{dt}=\frac{1}{2}\,\varphi^{-3/2}(2\varphi\varphi_{11}-3\varphi_1^2)\,u_4\,(\mathrm{mod}\,u_3).$$

Значит, $2\varphi\varphi_{11}-3\varphi_1^2=0$, и коэффициент $\varphi\,(u,\,u_1)$ в (20.9) равен

$$\varphi=(p\,(u)\,u_1+q\,(u))^{-2},\quad \text{если}\quad \varphi_1\neq 0, \tag{20.9'}$$

или

$$\varphi = \varphi(u). \tag{20.9''}$$

Дальнейший анализ необходимых условий ведется в предположении (20.9''), т. е. для полулинейного уравнения

$$u_t = \varphi(u)\, u_2 + \psi(u,\ u_1). \tag{20.10}$$

Для уравнения (20.10) с постоянной сепарантой,

$$u_t = u_2 + \psi(u,\ u_1), \tag{20.11}$$

выполнение первого необходимого условия (20.6) очевидно. Так как из уравнения (20.3) следует, что $\alpha = \alpha(t)$, то второе необходимое условие (20.7) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\psi_1}{dt} = 0. \tag{20.12}$$

Здесь

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_{11} D(u_2 + \psi) + \psi_{01}(u_2 + \psi) = A u_3 + B u_2 + C,$$

где $A = \psi_{11}$, $B = \psi_{01} + \psi_1 \psi_{11}$, $C = \psi\psi_{01} + \psi_0 \psi_{11} u$. Отсюда получается выражение

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\psi_1}{dt} = -D^3 A + D^2 B - D(A_1 u_3 + B_1 u_2 + C_1) + A_0 u_3 + B_0 u_2 + C_0,$$

старший член которого равен $-2A_1 u_4$, и уравнение (20.12) дает $A = A(u)$, т. е.

$$\psi = a(u)\, u_1^2 + b(u)\, u_1 + c(u). \tag{20.13}$$

Теперь левая часть (20.12) имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\psi_1}{dt} = (-3A'' u_1 + B_{01} u_1 + 2B_0 - C_{11})\, u_2 - A''' u_1^3 + B_{00} u_1^2 - C_{01} u_1 + C_0,$$

и поэтому

$$(-3A'' + B_{01})\, u_1 + 2B_0 - C_{11} = 0, \quad -A''' u_1^3 + B_{00} u_1^2 - C_{01} u_1 + C_0 = 0.$$

Эти уравнения после подстановки в A, B, C выражения (20.13) принимают вид

$$b'' - ab' = 0, \tag{20.14}$$

$$(cb')' = 0. \tag{20.15}$$

Если $b'(u) \neq 0$, то заменой $v = b(u)$ с учетом (20.13)—(20.15) уравнение (20.11) приводится к виду $v_t = v_2 + v v_1 + k$, $k = \text{const}$. Это уравнение переходит в уравнение Бюргерса (18.21) после точечной замены переменных $\bar{v} = v - kt$, $\bar{x} = x + \frac{1}{2} k t^2$.

Если в (20.13) $b=\text{const}$, можно положить $b=0$, так как $u_1 \in \mathcal{A}_F$, и вместо (20.11), (20.13) рассматривать уравнение

$$u_t = u_2 + a(u)\,u_1^2 + c(u) \tag{20.16}$$

с произвольными коэффициентами $a(u)$, $c(u)$. Оба условия (20.14) и (20.15) при этом выполнены, и уравнения (20.3), (20.4) дают

$$\alpha = \alpha(t), \quad \beta = au_2 + a^2u_1^2 + \alpha a u_1 + ac + \frac{1}{2}\alpha' x + k(t).$$

Теперь, пользуясь этими значениями коэффициентов α и β, можно записать условие интегрируемости уравнения (20.5) — третье необходимое условие нетривиальности алгебры Ли — Беклунда для (20.16):

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{d}{dt}(a'u_1^2 + c' + \beta) - 2au_1 D\beta\right) = 0.$$

Отсюда следуют условия $\alpha = 0$ и

$$c'' + (ac)' = 0. \tag{20.17}$$

Замечая, что решение $c(u)$ уравнения (20.17) принадлежит централизатору функции $F = u_2 + au_1^2$, вместо (20.16) можно рассматривать уравнение

$$u_t = u_2 + a(u)\,u_1^2. \tag{20.16'}$$

Как и уравнение Бюргерса (18.15), оно линеаризуется и переводится в уравнение теплопроводности (18.1) подстановкой

$$v = \Phi(u) = \int \exp\left(\int a(u)\,du\right) du. \tag{20.18}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякое эволюционное уравнение* (20.1) *с постоянной сепарантой, допускающее нетривиальную алгебру Ли — Беклунда, точечной заменой переменных приводится либо к уравнению теплопроводности* (18.1), *либо к уравнению Бюргерса* (18.21) *).

Для уравнения (20.10) с переменной сепарантой ($\varphi'(u) \neq 0$) первое необходимое условие (20.6) нетривиальности алгебры $\mathcal{A}_F$ дает

$$\psi = \left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'} - \frac{1}{2}\varphi'\right) u_1^2 + \lambda(u)\,u_1 + k\frac{\varphi^{3/2}}{\varphi'},$$

где $\lambda(u)$ — произвольная функция, $k = \text{const}$. Замена $\varphi(u) = v^2$ с учетом полученного выражения для ψ приводит уравнение (20.10) к виду

$$v_t = v^2(v_2 + h(v)\,v_1 + k).$$

*) К такому же результату приводит классификация уравнений вида (20.11) по специальному признаку, когда условие нетривиальности алгебры $\mathcal{A}_F$ заменяется требованием, чтобы она содержала элемент третьего порядка (Ибрагимов, Шабат [2], см. также Ибрагимов [17], Fokas [1]).

Для этого уравнения из (20.3) находится

$$\alpha = vv_1 + v\int h(v)\,dv + kxv + C(t),$$

и условие (20.7),

$$\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{dh}{dt} + v^{-2}\frac{d\alpha}{dt}\right) = 2(vh'' + 3h')\,vv_2 +$$
$$+ (vh''' + 3h' + (vh'' + 3h')'\,v)\,v_1^2 + k(vh' + h) - 2C'(t)\,v^{-3} = 0,$$

дает

$$k = 0, \quad h(v) = \lambda + \mu v^{-2}, \quad \lambda,\ \mu = \text{const}.$$

Постоянные λ, μ можно положить равными нулю, так как наличие μ приводит в рассматриваемом уравнении лишь к несущественному слагаемому μv_1, а λ исчезает после замены $\lambda x = \ln y$, $\lambda v = \bar{v}e^{-\lambda x}$. Этим доказана

Лемма 2. *Уравнение* (20.10) *с переменной сепарантой, допускающее нетривиальную алгебру Ли — Беклунда, точечным преобразованием приводится к виду*

$$v_t = v^2 v_2, \quad v = v(t,\ y). \tag{20.19}$$

4-параметрическая группа, состоящая из переносов по t, y и растяжений $y \mapsto ay$, $t \mapsto a^2 t$ и $y \mapsto by$, $v \mapsto bv$, является максимальной группой точечных преобразований, допускаемой уравнением (20.19). Поэтому (20.19) точечным преобразованием нельзя перевести в уравнение теплопроводности или Бюргерса (см. § 17.5). Однако (20.19) эквивалентно уравнению теплопроводности в смысле определения 19.4. Для нахождения преобразования эквивалентности удобно переписать (20.19) в дивергентной форме

$$w_t = D(w^{-2}w_1), \quad w = v^{-1}, \tag{20.19'}$$

и, введя потенциал z (т. е. полагая $w = z_1$), проинтегрировать:

$$z_t = z_1^{-2} z_2. \tag{20.19''}$$

Это уравнение линеаризуется и приводится к уравнению теплопроводности (18.1) для $u = u(t,\ x)$ точечным преобразованием (см. пример 19.4.3)

$$y = u, \quad z = x. \tag{20.20}$$

Отсюда с помощью формулы (19.44b) находятся преобразования

$$y = u, \quad w = u_1^{-1}, \tag{20.20'}$$

или

$$y = u, \quad v = u_1, \tag{20.20''}$$

переводящие каждое решение $u(t,\ x)$ уравнения (18.1) в решения уравнений (20.19′) и (20.19) соответственно.

Для преобразования (20.20″) $\varphi = u$, $\Phi = u_1$,

$$\Phi_* - v_1\varphi_* = D_x - \frac{u_2}{u_1} = u_1 D_x u_1^{-1}, \quad (\Phi_* - v_1\varphi_*)^{-1} = u_1 D_x^{-1} u_1^{-1},$$

$D_x = u_1 D_y$, $D_x^{-1} = D_y^{-1} u_1^{-1}$, и дифференциальные операторы (18.12) преобразованием (19.46) переводятся в рациональные операторы

$$\begin{aligned} L_1 &= u_1 D_x u_1^{-1} D_x u_1 D_x^{-1} u_1^{-1} = v^2 D_y^2 v D_y^{-1} v^{-2}, \\ L_2 &= 2tL_1 + u_1 D_x x D_x^{-1} u_1^{-1} = (2tv^2 D_y^2 + 1) v D_y^{-1} v^{-2} + x, \end{aligned} \tag{20.21}$$

порождающие алгебру $\mathscr{L}_F$ для уравнения (20.19); с их помощью по рекурренции строится алгебра Ли—Беклунда $\mathscr{A}_F$. Аналогично получаются операторы рекурренции

$$\begin{aligned} M_1 &= D_y^2 w^{-1} D_y^{-1}, \\ M_2 &= (2tD_y^2 w^{-1} + w) D_y^{-1} + x \end{aligned} \tag{20.21'}$$

для уравнения (20.19′) *). Полученные результаты доказывают справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Всякое уравнение* (20.1) *с сепарантой* $F_2(u)$ (*зависящей только от переменной* u), *допускающее нетривиальную алгебру Ли—Беклунда* $\mathscr{A}_F$, *точечным преобразованием приводится к одной из канонических форм* (18.1), (18.21) *или* (20.19) *с операторами рекурренции* (18.12), (18.23) *и* (20.21). *Все эти уравнения эквивалентны между собой относительно преобразований Ли—Беклунда вида* (19.44).

20.2. $m = 3$. Пусть

$$u_t = F(u, u_1, u_2, u_3),$$

а L—оператор вида (19.30). Из равенства

$$L_t - [F_*, L] = 0 \pmod{D^{-1}}$$

получаются четыре уравнения: (19.34), (19.36) и

$$\begin{aligned} \frac{d(F_1 + \alpha)}{dt} = {} & F_3 D^3\alpha + 3F_3 D^2\beta + 3F_3 D\gamma + \gamma DF_3 + \\ & + F_2 D^2\alpha + 2F_2 D\beta + F_1 D\alpha - \alpha DF_1, \end{aligned} \tag{20.22}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(F_0 + \beta)}{dt} = {} & F_3 D^3\beta + 3F_3 D^2\gamma + 3F_3 D\delta - \gamma D^2 F_3 + 2\delta DF_3 + F_2 D^2\beta + \\ & + 2F_2 D\gamma + \gamma DF_2 + F_1 D\beta - \alpha DF_0. \end{aligned} \tag{20.23}$$

Здесь эти соотношения используются для групповой классификации эволюционных уравнений вида

$$u_t = u_3 + \varphi(u, u_1). \tag{20.24}$$

---

*) Rosen [1] нашел преобразование Беклунда (являющееся обратным к (20.20″)), линеаризующее уравнение (20.19). То же преобразование для (20.19′) независимо нашли Bluman & Kumei [1], которые получили также рекурренцию M_1 из (20.21′), занимаясь групповой классификацией уравнений вида (20.10) с $\psi = \varphi(u) u_1^2$. Одновременно был получен оператор L_1 из (20.21) (Ибрагимов, Шабат [4]).

Так как при $F_3=1$, $F_2=0$ условия (19.35) и (19.37) выполнены, то для (20.24) уравнения (19.34) и (19.36) разрешимы и дают $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$. Уравнения (20.22), (20.23) можно записать теперь в виде

$$\frac{dF_1}{dt}=D(3\gamma-\alpha(t)F_1-\alpha'(t)x), \tag{20.22'}$$

$$\frac{dF_0}{dt}=D(3D\gamma+3\delta-\alpha(t)F_0-\beta'(t)x) \tag{20.23'}$$

и получить следующие два необходимых условия нетривиальности алгебры Ли—Беклунда для уравнения (20.24):

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\varphi_1}{dt}=0, \quad \frac{\delta}{\delta u}\frac{d\varphi_0}{dt}=0. \tag{20.25}$$

Из (20.25), выделяя старшие члены, получаем равенства

$$\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial u_1^2}=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial u\,\partial u_1}=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial u^2}=0,$$

откуда

$$\varphi=cu_1^3+(ku+l)u_1^2+a(u)u_1+b(u), \tag{20.26}$$

где c, k, $l=\mathrm{const}$. Подстановка выражения (20.26) в оставшиеся уравнения, вытекающие из (20.25), дает соотношения

$$k=0, \quad lb''=0, \quad (bb'')'=0, \quad (b''+2cb)''=0,$$
$$(ba')'=0, \quad (a'+8ca)'=0, \quad (6cb+la)'=0.$$

Отсюда простым перебором находится полный набор решений системы уравнений (20.25):

$$\varphi=-\frac{1}{8}u_1^3+(ce^u+ke^{-u})u_1, \tag{20.27}$$

$$\varphi=cu_1^3+ku_1^2, \tag{20.28}$$

$$\varphi=(cu^2+ku)u_1, \tag{20.29}$$

$$\varphi=cuu_1+k, \tag{20.30}$$

$$\varphi=cu_1^2+ku, \tag{20.31}$$

где c, k—произвольные постоянные; несущественное слагаемое cu_1 опущено, а в (20.31), кроме того, опущено постоянное слагаемое за счет замены $u\mapsto u+c$.

Уравнение $u_t=u_3+uu_1+k$ заменой $u=v+\frac{k}{2}t$ приводится к виду $v_t=v_3+vv_1+\frac{k}{2}(1+tv_1)$; слагаемым $\frac{k}{2}(1+tv_1)$ можно пренебречь, так как $1+tv_1$ является элементом алгебры $\mathcal{A}_F$ для уравнения Кортевега—де Фриза (§ 18.2). Следовательно, случай (20.30) приводится к функции (20.29), которая, в свою очередь, получается из (20.28) дифференцированием D и заменой $u_1\mapsto u$. Функция (20.31), как сейчас будет показано, удовлетворяет уравнению (19.23) только при $k=0$. Если подставить выражение

(20.31) в левую часть (19.23) и приравнять нулю коэффициент при D^{-1}, то условие разрешимости полученного уравнения имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\gamma}{dt}=0,$$

где $\gamma=\frac{1}{3}\left(u_3+\frac{1}{2}u_1^2+\alpha(t)u_1+ku+\alpha'(t)x\right)$ в силу (20.22); отсюда сразу получается $k=0$. Поэтому остаются только случаи (20.27) и (20.28). При $c\neq 0$ в (20.28) можно взять $c=1/3$, а $k=0$ (замена $u=v-kx$); при $c=0$ положим $k=1/2$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякое нелинейное уравнение* (20.24) *с нетривиальной алгеброй приводится к одному из следующих уравнений*:

$$u_t=u_3-\frac{21}{8}u_1^3+(ce^u+ke^{-u})u_1,\quad c,\ k=\text{const},\tag{20.32}$$

$$u_t=u_3+\frac{1}{3}u_1^3,\tag{20.33}$$

$$u_t=u_3+\frac{1}{2}u_1^2.\tag{20.34}$$

Уравнения (20.34) и (19.49′) эквивалентны и связаны преобразованием $v=u_1$; формула (19.46) переводит (19.50′) в оператор рекурренции для уравнения (20.34)

$$L=D^{-1}\tilde{L}D=D^2+\frac{2}{3}u_1-\frac{1}{3}D^{-1}u_2.\tag{20.35}$$

То же преобразование $v=u_1$ переводит уравнение (20.33) в (19.49), в оператор (19.50) — в оператор рекурренции

$$L=D^2+\frac{2}{3}u_1^2-\frac{2}{3}u_1D^{-1}u_2\tag{20.36}$$

для уравнения (20.33). Ввиду эквивалентности уравнений (19.49) и (19.49′) это означает, что уравнения (20.33) и (20.34) эквивалентны (формула (19.51) реализуется для них в виде преобразования Беклунда). Кроме того, справедливо следующее утверждение *).

Лемма 2. *Уравнение* (20.32) *эквивалентно уравнению Кортевега—де Фриза.*

Доказательство. Достаточно показать, что (20.32) эквивалентно модифицированному уравнению Кортевега—де Фриза

$$v_t=v_3-6v^2v_1+\lambda v_1,\qquad \lambda=\text{const}.\tag{20.37}$$

*) Calogero & Degasperis [1] получили уравнение (20.32) методом редукции из интегрируемых матричных эволюционных уравнений. Преобразование этого уравнения к уравнению Кортевега—де Фриза нашли А. Б. Шабат (доклад на Советско-американском симпозиуме по солитонам, Киев, 4—16 сентября 1979 г. см. также Ибрагимов, Шабат [4]), F. Magri, A. Degasperis (см. Degasperis [1]).

Подстановкой выражения $v=\Phi(u, u_1)$ в (20.37) однозначно (с точностью до выбора знаков между слагаемыми) находится замена

$$v=\frac{1}{4}u_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{c}\,e^{u/2}+\sqrt{k}\,e^{-u/2}\right), \tag{20.38}$$

переводящая (20.32) в уравнение (20.37) с $\lambda=-2\sqrt{ck}$. Суперпозиция (20.38) с преобразованием Миуры $w=-(v_1+v^2)$ переводит (20.32) в уравнение Кортевега—де Фриза $w_t=w_3+6ww_1$.

Замечание. Алгебра $\mathscr{L}_F$ для уравнения (20.32) порождается оператором

$$L=D^2-\frac{1}{4}u_1^2-\frac{2}{3}\left(\sqrt{c}\,e^{u/2}+\sqrt{k}\,e^{-u/2}\right)^2+$$
$$+u_1D^{-1}\left(\frac{1}{4}u_2+\frac{1}{3}ce^{u}-\frac{1}{3}ke^{-u}\right). \tag{20.39}$$

Он получается из оператора рекурренции

$$\tilde{L}=D^2-4v^2-4v_1D^{-1}v$$

для уравнения (20.37) путем преобразований (20.38), (19.46). Если по аналогии с $\tilde{L}$ оператор L искать в виде

$$L=D^2+\alpha+\beta D^{-1}\gamma,$$

то из уравнения $\tilde{L}\Phi_*=\Phi_*L$, где $\Phi=\Phi(u, u_1)$—правая часть (20.38), легко находится оператор (20.39).

Из предыдущих лемм вытекает классификационный результат относительно уравнений с постоянной сепарантой.

Теорема. *Любое уравнение вида* (20.24) *с нетривиальной алгеброй Ли—Беклунда эквивалентно либо линейному уравнению с постоянными коэффициентами, либо уравнению Кортевега—де Фриза.*

Теорему дополняет следующее

Предложение (Ибрагимов [18]). *Уравнение* *)

$$u_t=u^3u_3, \quad u=u(t, x), \tag{20.40}$$

эквивалентно уравнению Кортевега—де Фриза

$$v_t=v_3+vv_1, \quad v=v(t, y). \tag{20.41}$$

Доказательство. Уравнение (20.41) преобразованием

$$v=3w_1^{-1}w_3-\frac{9}{2}w_1^{-2}w_2^2 \tag{20.42}$$

приводится к виду

$$w_t=w_3-\frac{3}{2}w_1^{-1}w_2^2, \quad w=w(t, y). \tag{20.43}$$

---

*) Его нашел H. Dym (см. Kruskal [1], стр. 313). Уравнение (20.40) записывается также в виде $z_t=(z^{-1/2})_{xxx}$, $z=u^{-2}$.

Сделаем теперь замену

$$x=w, \quad u=w_1, \tag{20.44}$$

для которой формулы (19.44) дают $w_{1t}=u_t+u_1w_t$, $w_1=u$, $w_2=uu_1$, $w_3=u^2u_2+uu_1^2$, $w_4=u^3u_3+4u^2u_1u_2+uu_1^3$. Подстановкой этих выражений в равенство

$$w_{1t}=w_4-3w_1^{-2}w_2w_3+\frac{3}{2}w_1^{-2}w_2^3, \tag{20.45}$$

полученное дифференцированием (20.43), приходим к (20.40). Таким образом, преобразование эквивалентности между уравнениями (20.40) и (20.41) осуществляется формулами (20.42) и (20.44).

20.3. Две системы нелинейных уравнений. Рассматриваемые системы возникают в теории распространения волн в нелинейных средах. Они представимы в форме Лакса и имеют счетное множество полиномиальных законов сохранения (Захаров, Манаков [1], Манаков [1]). По групповым свойствам эти системы подобны скалярным эволюционным уравнениям.

Первая система

$$\left(\frac{d}{dt}+c_{ij}D\right)u_{ij}=\sum_{k\neq i,\ j}(c_{ik}-c_{kj})\,u_{ik}u_{kj}, \quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n, \tag{20.46}$$

описывает резонансное взаимодействие n волн. Здесь $D=D_x$, $c_{ij}=\dfrac{b_i-b_j}{a_i-a_j}$; a_i, $b_i=\mathrm{const}$, $a_i\neq a_j$ $(i\neq j)$, $u_{ii}=0$, все индексы принимают значения от 1 до n. Операторы $X=f_{ij}\dfrac{\partial}{\partial u_{ij}}+\ldots$, допускаемые системой (20.46), находятся из определяющих уравнений

$$\left(\frac{d}{dt}+c_{ij}D\right)f_{ij}-\sum_{k\neq i,\ j}(c_{ik}-c_{kj})\,(u_{ik}f_{kj}+u_{kj}f_{ik}=0. \tag{20.47}$$

Эти уравнения имеют $n-1$ линейно независимых решений нулевого порядка

$$\overset{(0)}{f}_{ij}=u_{ij}, \quad \overset{(0)}{f}_{ji}=-u_{ji}, \quad \overset{(0)}{f}_{jk}=0\ (j,\ k\neq i), \qquad i=1,\ \ldots,\ n-1. \tag{20.48}$$

Функции (20.48) и рекуррентная формула

$$\begin{aligned}\overset{(m+1)}{f}_{ij}=\frac{1}{a_i-a_j}D\overset{(m)}{f}_{ij}+\sum_{k\neq i,\ j}\left(\frac{1}{a_k-a_j}u_{ik}\overset{(m)}{f}_{kj}-\frac{1}{a_i-a_k}u_{kj}\overset{(m)}{f}_{ik}\right)+\\ +u_{ij}\left[\sum_{k\neq i}\frac{1}{a_k-a_i}D^{-1}\left(u_{ik}\overset{(m)}{f}_{ki}+u_{ki}\overset{(m)}{f}_{ik}\right)-\right.\\ \left.-\sum_{k\neq j}\frac{1}{a_k-a_j}D^{-1}\left(u_{jk}\overset{(m)}{f}_{kj}+u_{kj}\overset{(m)}{f}_{jk}\right)\right]\end{aligned} \tag{20.49}$$

порождают общее решение (не зависящее от t, x) определяющих уравнений. Формула (20.49) переводит любое решение порядка m в решение порядка $m+1$, так как справедливо соотношение

$$(a_i-a_j)\,R\left[\overset{(m+1)}{f}_{ij}\right]=DR\left[\overset{(m)}{f}_{ij}\right],$$

где $R[f_{ij}]$ — левая часть (20.47).

Второй пример — система нелинейных уравнений Шредингера

$$\left(i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)u_k=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)v_k=0,\qquad k=1,\ \ldots,\ n,\tag{20.50}$$

где $i=\sqrt{-1}$, $u\cdot v=\sum\limits_{k=1}^{n}u_kv_k$. Определяющие уравнения для операторов Ли — Беклунда $X=f_k\dfrac{\partial}{\partial u_k}+g_k\dfrac{\partial}{\partial v_k}+\ldots$ имеют вид

$$\left(i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)f_k+u_k(u\cdot g+v\cdot f)=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)g_k+v_k(u\cdot g+v\cdot f)=0.$$

Их общее решение задается рекурренцией

$$\overset{(m+1)}{f}_k=-D\overset{(m)}{f}_k-\frac{1}{2}u_kD^{-1}\left(u\cdot\overset{(m)}{g}+v\cdot\overset{(m)}{f}\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}u_jD^{-1}\left(v_j\overset{(m)}{f}_k+u_k\overset{(m)}{g}_j\right),$$

$$\overset{(m+1)}{g}_k=D\overset{(m)}{g}_k+\frac{1}{2}v_kD^{-1}\left(u\cdot\overset{(m)}{g}+v\cdot\overset{(m)}{f}\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}v_jD^{-1}\left(u_j\overset{(m)}{g}_k+v_k\overset{(m)}{f}_j\right),$$

$$\overset{(0)}{f}_k=-u_k,\quad \overset{(0)}{g}_k=v_k,\quad k=1,\ \ldots,\ n;\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\tag{20.51}$$

и следующими решениями нулевого порядка: $\overset{(0)}{f}_k=u_j$, $\overset{(0)}{g}_j=-v_k$, $\overset{(0)}{f}_p=0$, $\overset{(0)}{g}_l=0$, j, $p\neq k$; $l\neq j$, $k=1,\ \ldots,\ n$. Приведенные здесь коммутативные алгебры построил Жибер [1].

§ 21. Уравнение $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$

21.1. Анализ общего случая. Теория групп Ли — Беклунда позволяет по-новому взглянуть на классическую задачу групповой классификации и интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Остановимся сначала на вопросе о построении допускаемой алгебры, взяв в качестве примера уравнение Монжа — Ампера, являющееся типичным представителем нелинейных уравнений с нетривиальной группой контактных преобразований.