порождают общее решение (не зависящее от t, x) определяющих уравнений. Формула (20.49) переводит любое решение порядка m в решение порядка $m+1$, так как справедливо соотношение

$$(a_i-a_j)\,R\left[\overset{(m+1)}{f}_{ij}\right]=DR\left[\overset{(m)}{f}_{ij}\right],$$

где $R[f_{ij}]$ — левая часть (20.47).

Второй пример — система нелинейных уравнений Шредингера

$$\left(i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)u_k=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)v_k=0,\qquad k=1,\ \ldots,\ n,\tag{20.50}$$

где $i=\sqrt{-1}$, $u\cdot v=\sum\limits_{k=1}^{n}u_kv_k$. Определяющие уравнения для операторов Ли — Беклунда $X=f_k\dfrac{\partial}{\partial u_k}+g_k\dfrac{\partial}{\partial v_k}+\ldots$ имеют вид

$$\left(i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)f_k+u_k(u\cdot g+v\cdot f)=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)g_k+v_k(u\cdot g+v\cdot f)=0.$$

Их общее решение задается рекурренцией

$$\overset{(m+1)}{f}_k=-D\overset{(m)}{f}_k-\frac{1}{2}u_kD^{-1}\left(u\cdot\overset{(m)}{g}+v\cdot\overset{(m)}{f}\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}u_jD^{-1}\left(v_j\overset{(m)}{f}_k+u_k\overset{(m)}{g}_j\right),$$

$$\overset{(m+1)}{g}_k=D\overset{(m)}{g}_k+\frac{1}{2}v_kD^{-1}\left(u\cdot\overset{(m)}{g}+v\cdot\overset{(m)}{f}\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}v_jD^{-1}\left(u_j\overset{(m)}{g}_k+v_k\overset{(m)}{f}_j\right),$$

$$\overset{(0)}{f}_k=-u_k,\quad \overset{(0)}{g}_k=v_k,\quad k=1,\ \ldots,\ n;\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\tag{20.51}$$

и следующими решениями нулевого порядка: $\overset{(0)}{f}_k=u_j$, $\overset{(0)}{g}_j=-v_k$, $\overset{(0)}{f}_p=0$, $\overset{(0)}{g}_l=0$, j, $p\neq k$; $l\neq j$, $k=1,\ \ldots,\ n$. Приведенные здесь коммутативные алгебры построил Жибер [1].

§ 21. Уравнение $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$

21.1. Анализ общего случая. Теория групп Ли — Беклунда позволяет по-новому взглянуть на классическую задачу групповой классификации и интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Остановимся сначала на вопросе о построении допускаемой алгебры, взяв в качестве примера уравнение Монжа — Ампера, являющееся типичным представителем нелинейных уравнений с нетривиальной группой контактных преобразований.

Рассмотрим уравнение *)

$$s^2 - rt = 0. \tag{21.1}$$

Для него определяющее уравнение (17.4),

$$(tD_x^2 - 2sD_xD_y + rD_y^2) f = 0,$$

можно переписать в виде

$$(D_x - \lambda D_y)^2 f = 0, \quad \lambda = \frac{s}{t}, \tag{21.2}$$

так как $(D_x - \lambda D_y)\lambda = 0$ в силу (21.1). Группе контактных преобразований соответствуют решения первого порядка $\overset{(1)}{f} = f(x, y, z, p, q)$ уравнения (21.2). Для их отыскания заметим, что на дифференциальном многообразии, заданном уравнением (21.1), оператор $(D_x - \lambda D_y)^2$ действует по формуле

$$(D_x - \lambda D_y)^2 = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right) - \lambda\left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]^2 + \ldots,$$

где опущенные слагаемые не содержат дифференцирований по p и q. Поэтому в случае решений первого порядка уравнение (21.2) распадается на систему трех уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right) f = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = 0.$$

Отсюда

$$\overset{(1)}{f} = x\xi(p, q, z - xp - yq) + y\eta(p, q, z - xp - yq) + \zeta(p, q, z - xp - yq)$$

с произвольными функциями ξ, η, ζ. В этой формуле содержатся, в частности, функции $f =$

$$1, x, y, z, p, q, xp, yp, zp, xq, yq, zq,$$
$$x(z + xp + yq), \quad y(z + xp + yq), \quad z(z + xp + yq),$$

порождающие максимальную (15-параметрическую) группу точечных преобразований, допускаемую уравнением (21.1). Общее решение определяющего уравнения (21.2) дается формулой (см. Чупахин [2] и Хабиров [2])

$$\overset{(n)}{f} = \sum_{i=0}^{n} R^{i-1}(y)\varphi_i(p, q, \omega, Rq, R\omega, \ldots, R^{n-1}q, R^{n-1}\omega), \tag{21.3}$$

где

$$\omega = z - xp - yq, \quad R = (rt)^{-1/2} D_y, \quad R^{-1}(y) \overset{\text{def.}}{=} 1, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

дифференцирование D_y производится с учетом уравнения (21.1).

*) Используются стандартные обозначения Монжа: $p = z_x$, $q = z_y$, $= z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$.

Для общего уравнения

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{21.4}$$

построение алгебры Ли—Беклунда сводится к решению уравнения

$$F_* f=0, \tag{21.5}$$

где

$$F_*=F_z+F_pD_x+F_qD_y+F_rD_x^2+F_sD_yD_x+F_tD_y^2.$$

Равенство (21.5) должно выполняться на дифференциальном многообразии $[F]$, заданном уравнением (21.4) (см. § 17.1). Анализ определяющего уравнения упрощается, если $[F]$ можно записать в разрешенном виде (15.19). Предположим, например, что $F_s\neq 0$, и потребуем, чтобы $[F]$ можно было разрешить относительно всех смешанных производных. Для разрешимости уравнений $D_xF=0$, $D_yF=0$ относительно переменных z_{xxy}, z_{xyy} нужно, чтобы был отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} F_s & F_r \\ F_t & F_s \end{vmatrix}=(F_s)^2(1-\tau), \quad \text{где} \quad \tau=\frac{F_rF_t}{(F_s)^2}.$$

Продолжение этого процесса приводит к условию, чтобы $P_n(\tau)$, определенные рекуррентно по формуле

$$P_1=1, \quad P_2=1-\tau, \quad P_n=P_{n-1}-\tau P_{n-2}, \tag{21.6}$$

были отличны от нуля. Вопрос о нулях решает следующее утверждение (Хабиров [2]).

Теорема. *Полиномы* (21.6) *представимы в виде*

$$P_n(\tau)=\frac{(1+a)^{n+1}-(1-a)^{n+1}}{2^{n+1}a}, \qquad a=\sqrt{1-4\tau},$$

и имеют корни

$$\tau_{nk}=\frac{1}{4}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi k}{n+1}\right), \qquad k=1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{21.7}$$

Согласно формуле (21.7) все корни полиномов $P_n(\tau)$ строго больше 1/4, причем $\tau=1/4$ является точкой сгущения минимальных корней. К особому случаю $\tau=1/4$ относится, в частности, уравнение минимальных поверхностей

$$2s=\frac{q}{p}r+\frac{p}{q}t. \tag{21.8}$$

Для него общее решение порядка $n\geqslant 1$ определяющего уравнения (21.5) дается формулой

$$\overset{(n)}{f}=\sum_{i=0}^{n}T^{i-1}(a)\,\varphi_i(z, \rho, \omega, \ldots, R^{n-1}\rho, R^{n-1}\omega), \tag{21.9}$$

где

$$a=\sqrt{pq}, \quad \rho=qp^{-1}, \quad \omega=x+y\rho,$$

$$T=q^{-1}D_y-p^{-1}D_x, \quad R=q^{-1}D_y, \quad R^{-1}(a)\overset{\text{def}}{=}1.$$

Вывод этой формулы, а также более подробный анализ определяющего уравнения в общем случае имеются в цитированной выше работе Хабирова.

21.2. Классификация уравнений $s=F(z)$. В настоящее время имеется групповая классификация уравнений второго порядка вида

$$s=F(z). \tag{21.10}$$

Lie [3] провел классификацию таких уравнений на основе контактных преобразований, чтобы выяснить, какие из них допускают интегрирование методом Дарбу. Выяснилось, что для уравнений вида (21.10) допускаемая группа контактных преобразований сводится к точечным преобразованиям вида (с точностью до несущественной замены $x\mapsto y$, $y\mapsto x$)

$$\bar{x}=X(x), \quad \bar{y}=Y(y), \quad \bar{z}=Z(x, y, z), \tag{21.11}$$

а единственным нелинейным уравнением, интегрируемым методом Дарбу, является уравнение Лиувилля

$$s=e^z. \tag{21.12}$$

Ли выделил также уравнение Бонне

$$s=\sin z, \tag{21.13}$$

чтобы подчеркнуть геометрическое значение результата групповой классификации. Для (21.12) преобразование (21.11) имеет вид

$$\bar{x}=X(x), \quad \bar{y}=Y(y), \quad \bar{z}=z-\ln X'(x)-\ln Y'(y), \tag{21.14}$$

и Ли констатирует, что уравнение Лиувилля, как и линейные уравнения, инвариантно относительно бесконечной группы, содержащей две произвольные функции, но не линеаризуется. Последнее утверждение верно, однако, только по отношению к точечным преобразованиям: как указывалось в примере 14.4.6, уравнение Лиувилля можно линеаризовать преобразованием Ли — Беклунда. Итак, первым дополнением к классификации Ли является

Лемма. *Уравнение Лиувилля* (21.12) *эквивалентно волновому уравнению*

$$s'=0 \tag{21.15}$$

и приводится к нему одним из следующих преобразований Ли — Беклунда:

$$z=\ln\left(2\frac{p'q'}{z'^2}\right), \tag{21.16}$$

$$z=\ln\left[2\left(1+\operatorname{tg}^2 z'\right)p'q'\right]. \tag{21.16'}$$

Замечание 1. Пусть даны два уравнения: (21.10) и $s'=G(z')$. Прямой подстановкой функции $z=\Phi(z', p', q')$ во второе уравнение с учетом первого из них доказывается несколько

более общее утверждение. Преобразование Ли—Беклунда первого порядка существует только между уравнениями (21.12) и (21.15) (за исключением тривиальных точечных замен и случаев линейных уравнений), а само преобразование дается либо формулой (21.16), либо формулой (21.16′).

Замечание 2. Класс эквивалентных уравнений не удается увеличить за счет преобразований Ли—Беклунда второго порядка $z=\Phi(z', p', q', r', t')$: если такое преобразование переводит (21.10) в уравнение $s'=G(z')$, то, за исключением тривиальных случаев линейных уравнений, $F=Ce^{kz}$, $G=0$, C, $k=\text{const}$.

При переходе от классификации по группам контактных преобразований к рассмотрению уравнений с нетривиальной группой Ли—Беклунда получается следующий классификационный результат (Жибер, Шабат [1], см. также Жибер, Ибрагимов, Шабат [1, 2]).

Теорема. *Пусть для уравнения* (21.10) *определяющее уравнение*

$$(D_y D_x - F'(z))\, f = 0 \tag{21.17}$$

имеет решение порядка $n \geqslant 3$

$$\overset{(n)}{f} = f(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad z_i = D_x^i(z). \tag{21.18}$$

Тогда с помощью точечных преобразований уравнения (21.10) *функцию* F *можно привести к одному из стандартных видов:*

$$0, \quad e^z, \quad \sin z, \quad e^z + e^{-2z}, \tag{21.19}$$

причем случаи $s=e^z$ *и* $s=0$ *эквивалентны относительно преобразований Ли—Беклунда.*

Доказательство. Сначала следует заметить, что подстановка произвольной дифференциальной функции порядка n в равенство (21.17) приводит к разложению (18.45), составляющие g и h которого должны быть решениями уравнения (21.17), причем для нелинейных уравнений (21.10) $c=0$. Ограничившись рассмотрением функций, не зависящих от x и y, легко показать, что определяющее уравнение не имеет решений порядка 2. Таким образом, формулой (21.18) представлен общий вид решения (не зависящего от x и y) определяющего уравнения.

Подстановка (21.18) в левую часть (21.17) дает

$$(D_y D_x - F'(z))\, \overset{(n)}{f} = z_{n+1} D_y \left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\right) + \ldots,$$

и из определяющего уравнения получается первое условие

$$D_y \left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} D_x^{i-1}(F) \frac{\partial^2 f}{\partial z_i\, \partial z_n} = 0. \tag{21.20}$$

Отсюда в случае $(F'/F)' \neq 0$ следует представление решения: $\overset{(n)}{f} = z_n + cz_{n-1} + g(z_1, \ldots, z_{n-2})$. Повторением процедуры находится следующее необходимое условие нетривиальности алгебры (детали доказательства см. Жибер, Шабат [1]):

$$F'' = \alpha F + \beta F', \tag{21.21}$$

где α, β—комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\beta(\alpha - 2\beta^2) = 0. \tag{21.22}$$

Общее решение уравнений (21.21), (21.22) и $(F'/F)' = 0$ представлено в каноническом виде таблицей (21.19).

Остается проверить, что уравнения (21.13) и

$$s = e^z + e^{-2z} \tag{21.23}$$

имеют нетривиальную алгебру. В случае (21.13) определяющее уравнение имеет нетривиальное решение третьего порядка

$$\overset{(3)}{f} = z_3 + \frac{1}{2} z_1^3, \tag{21.24}$$

а в случае (21.23)—нетривиальное решение пятого порядка

$$\overset{(5)}{f} = z_5 + 5(z_2 z_3 - z_1^2 z_3 - z_1 z_2^2) + z_1^5. \tag{21.25}$$

Лемма завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Уравнения* (21.13) *и* (21.23) *допускают бесконечную коммутативную алгебру элементов вида* (21.18).

Доказательство. Коммутативность вытекает из представления решения $\overset{(n)}{f}$ в случае $(F'/F)' \neq 0$. В силу коммутативности алгебра, допускаемая уравнением (21.13), совпадает с централизатором функции (21.24), т. е. с бесконечной алгеброй Ли—Беклунда модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза $z_t = z_3 + \frac{1}{2} z_1^3$. Аналогично алгебра, допускаемая уравнением (21.23), совпадает с алгеброй Ли—Беклунда эволюционного уравнения

$$z_t = z_5 + 5(z_2 z_3 - z_1^2 z_3 - z_1 z_2^2) + z_1^5. \tag{21.25'}$$

В этом случае вопрос решают замена *)

$$u = -(z_2 + z_1^2), \tag{21.26}$$

переводящая (21.25′) в уравнение (18.39), рекурренция (18.41) и теорема 19.4.

---

*) Эту замену нашли Ибрагимов, Шабат (см. Соколов, Шабат [1]) и Fordy & Gibbons [1].

Замечание 3. Для уравнения Лиувилля (21.12) алгебра некоммутативна и состоит из элементов

$$f=(D_x+z_1)\,\varphi(x, w, w_1, w_2, \ldots), \tag{21.27}$$

где $w=z_2-{}^1/_2 z_1^2$, $w_i=D_x^i w$.

21.3. Система двух нелинейных уравнений. Аналогично предыдущему исследуются системы

$$u_{xy}=A(u, v), \quad v_{xy}=B(u, v). \tag{21.28}$$

Как и в случае скалярного уравнения, достаточно рассматривать операторы Ли—Беклунда $X=f\frac{\partial}{\partial u}+g\frac{\partial}{\partial v}+\ldots$ с координатами f и g, зависящими от переменных $u_i=D_x^i(u)$, $v_i=D_x^i(v)$, $i=1, \ldots, n$. Условие (21.20) заменяется уравнением

$$\sum_{i=1}^{n}\left(D_x^{i-1}(A)\frac{\partial w}{\partial u_i}+D_x^{i-1}(B)\frac{\partial w}{\partial v_i}\right)=0, \tag{21.29}$$

которому должны удовлетворять производные функций f и g по переменным u_n, v_n. В уравнении (21.29) присутствуют «лишние» переменные u, v, и поэтому оно представляет собой переопределенную систему: это можно выразить явно, добавив к (21.29) уравнения $\partial w/\partial u=0$, $\partial w/\partial v=0$. Исследование разрешимости уравнения (21.29) занимает центральное место при групповой классификации. В следующей теореме перечислены все системы (21.28) (с точностью до линейных преобразований функций u, v), для которых уравнение (21.29) имеет нетривиальное решение w второго порядка (Жибер, Ибрагимов, Шабат [2]).

Теорема. *Системы* (21.28), *для которых существует решение* $w(u_1, v_1, u_2, v_2)\neq\mathrm{const}$ *уравнения* (21.29), *имеют вид*

$$u_{xy}=\Phi(au+bv)\,e^{av}, \quad v_{xy}=\Phi'(au+bv)\,e^{av}, \tag{21.30}$$

где Φ — *произвольная функция*, Φ' — *ее производная*, a *и* b — *комплексные параметры. При этом*

$$w=u_2-a u_1 v_1-\frac{b}{2}v_1^2, \tag{21.31}$$

а формулы

$$f=\left(-\frac{b}{a^2}D_x+u_1\right)\varphi(w, D_x w, \ldots), \quad g=\left(\frac{1}{a}D_x+v_1\right)\varphi(w, D_x w, \ldots) \tag{21.32}$$

задают бесконечную алгебру, допускаемую системой (21.30).

Замечание. Кроме общего случая (21.30) уравнение (21.29) имеет нетривиальное решение $w=u_2-{}^1/_2 u_1^2$ для вырожденной системы

$$u_{xy}=e^u, \quad v_{xy}=B(u, v) \tag{21.33}$$

с произвольной функцией B.

Доказательство. При $n=2$ уравнение (21.29) может иметь одно, два или три функционально независимых решения. Оставляя в стороне специальные случаи, когда число независимых решений равно двум или трем, предположим, что имеется только одно функционально независимое решение $w_0=w_0(u_1, v_1, u_2, v_2)$. Так как коэффициенты уравнения (21.29) при $n=2$ не зависят от u_2, v_2, то вместе с функцией w_0 решениями являются также ее производные по u_2 и v_2, так что

$$\frac{\partial w_0}{\partial u_2}=\varphi(w_0), \quad \frac{\partial w_0}{\partial v_2}=\psi(w_0).$$

Поэтому $\alpha\frac{\partial w_0}{\partial u_2}+\beta\frac{\partial w_0}{\partial v_2}=0$ с некоторыми постоянными α, β, откуда $w_0=w_0(u_1, v_1, p)$ с $p=\beta u_2-\alpha v_2$. Так как $\frac{\partial w_0}{\partial p}$ — снова решение, то $\frac{\partial w_0}{\partial p}=\varphi(w_0)$. Положив $w=\psi(w_0)$, где $\psi'(w_0)=\varphi^{-1}(w_0)$, получим линейное по p решение w. Подстановка этой функции w в уравнение (21.29) дает общий возможный вид решения:

$$w=\beta u_2-\alpha v_2+c_{11}u_1^2+2c_{12}u_1v_1+c_{22}v_1^2, \qquad c_{ij}=\text{const}.$$

Отсюда линейной заменой переменных u, v в общем случае получается формула (21.31), а в вырожденном случае — указанная в замечании функция w. Из уравнения (21.29) после подстановки туда значения w находятся функции $A(u, v)$ и $B(u, v)$. Элементы алгебры строятся однозначно и даются формулами (21.32).

В случае линейной функции Φ, т. е. для системы

$$u_{xy}=(u+bv)e^v, \qquad v_{xy}=e^v, \tag{21.34}$$

и только в этом случае уравнение (21.29) имеет два независимых решения порядка 2; три независимых решения порядка 2 оно имеет при $\Phi=\text{const}$. Система (21.34) допускает полное интегрирование путем сведения к волновому уравнению с помощью преобразования Ли — Беклунда первого порядка вида

$$u=\varphi(z, z', p, p', q, q'), \qquad v=\psi(z, z', p, p', q, q'). \tag{21.35}$$

Подстановкой (21.35) в (21.34) находится преобразование

$$u+bv=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p'}+\frac{q}{q'}\right)-\frac{z}{z'}, \quad v=\ln\left(2\frac{p'q'}{z'^2}\right), \tag{21.36}$$

которое два произвольных решения $z(x, y)$ и $z'(x, y)$ волнового уравнения $s=0$ переводит в решение системы (21.34); формула (21.36) задает представление общего решения этой системы.

Выше рассматривались только те системы, для которых уравнение (21.29) имеет решение порядка 2. Недавно получены (см. Лезнов, Смирнов, Шабат [1], Шабат, Ямилов [1], Лезнов, Савельев [1]) общие классификационные результаты для систем с экспоненциальными правыми частями и найдены алгебраические критерии интегрируемости этих систем.