Лемма 22.4 в случае эволюционных уравнений утверждает, что для любых решений f и g уравнений (19.5) и (22.24) соответственно их произведение fg удовлетворяет (22.22). Действительно, для $\overline{X}=f\frac{\partial}{\partial u}+\ldots$ имеем, используя (22.25), (22.23),

$$\overline{X}h=h_*f=f\frac{\delta h}{\delta u}+D\psi=fg\,(\mathrm{mod}\,D\psi). \tag{22.28}$$

§ 23. Примеры

23.1. Движение в пространстве де Ситтера. Свободная частица в 4-мерном пространстве-времени V_4 движется по геодезической. Лагранжиан частицы с массой m, движущейся в пространстве V_4 с метрической формой (6.4), равен

$$\mathscr{L}=-mc\sqrt{g_{ij}(x)\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}, \tag{23.1}$$

где c — скорость света, x^i, $i=1, \ldots, 4$, — дифференциальные переменные, $\dot{x}^i$ — их производные по независимой переменной, в качестве которой выбирается произвольный параметр σ, так что траекторией частицы будет кривая $x^i=x^i(\sigma)$, $i=1, \ldots, 4$, в V_4. Элементарное действие $\mathscr{L}\,d\sigma$ инвариантно относительно группы изометрических движений в V_4. Поэтому применима теорема Нётер, в которой в качестве оператора (22.1) участвуют операторы

$$X=\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

с координатами η^i, удовлетворяющими уравнениям Киллинга (7.3). В качестве параметра σ удобно выбрать длину s кривой. Тогда $g_{kl}(x)\,\dot{x}^k\,\dot{x}^l=1$, так что

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^i}=-mc\,(g_{kl}\dot{x}^k\,\dot{x}^l)^{-1/2}g_{ij}\dot{x}^j=-mcg_{ij}\dot{x}^j.$$

С учетом этого равенства по формуле (22.9) получается следующее выражение для вычисления интегралов движения:

$$I=mcg_{ij}\,\dot{x}^i\eta^j. \tag{23.2}$$

Пространство де Ситтера — это пространство-время V_4 постоянной кривизны. Так как оно имеет 10-параметрическую группу изометрий (§ 8.2), то имеется 10 линейно независимых интегралов движения. Их вычисление удобно проводить в системе координат, в которой метрическая форма имеет вид (8.14), т. е.

$$ds^2=\theta^{-2}\,(c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2), \tag{23.3}$$

где

$$\theta=1+\frac{K}{4}\,(c^2t^2-x^2-y^2-z^2),\qquad K=\mathrm{const}.$$

Пусть $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, $x^4=t$, латинские индексы i, j принимают значения от 1 до 4, а греческие μ, ν — от 1 до 3. Для трехмерных пространственных векторов $\boldsymbol{x}=(x^1, x^2, x^3)$, $\boldsymbol{v}=(v^1, v^2, v^3)$ используются обычные обозначения $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}$ для скалярного и векторного произведений. Так как в силу (23.3) $ds=\frac{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}|^2}}{\theta}dt$, компоненты 4-скорости $\dot{x}^i=dx^i/ds$ связаны с компонентами $v^\mu=dx^\mu/dt$ физической скорости $\boldsymbol{v}$ соотношениями

$$\dot{x}^\mu=\frac{\theta v^\mu}{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}|^2}}, \qquad \dot{x}^4=\frac{\theta}{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}|^2}}. \tag{23.4}$$

Операторы группы изометрий указаны в формулах (8.16); выпишем соответствующие им интегралы (23.2).

В классической и релятивистской механике инвариантность относительно переносов времени и пространственных координат приводит к законам сохранения энергии и импульса соответственно. В пространстве де Ситтера переносы заменяются однопараметрическими группами, порожденными операторами X_4 и X_μ, $\mu=1, 2, 3$, из (8.16). Соответствующие им интегралы движения также будут называться энергией и импульсом.

Оператор X_4 имеет координаты

$$\eta^\mu=\frac{K}{2}x^4x^\mu, \qquad \eta^4=\frac{1}{c^2}\left(\theta+\frac{K}{2}|\boldsymbol{x}|^2\right).$$

Подстановкой этих функций η^j в (23.2) с учетом соотношений (23.4) получается следующее выражение для энергии частицы, свободно движущейся в пространстве де Ситтера:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}}\left[1+\frac{K}{2\theta}(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{x}\right]. \tag{23.5}$$

Операторам X_μ с координатами

$$\eta^i_\mu=(\theta-2)\,\delta^{i\mu}+\frac{K}{2}x^ix^\mu$$

соответствует импульс

$$\boldsymbol{P}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}}\left[\left(\frac{2}{\theta}-1\right)\boldsymbol{v}+\frac{K}{2\theta}(c^2t-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}\right]. \tag{23.6}$$

Интегралы, соответствующие операторам вращения $X_{\mu\nu}$, образуют вектор углового момента, который с учетом формулы (23.6) и тождества $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}=0$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2-\theta}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{P}). \tag{23.7}$$

Инвариантность относительно преобразований Лоренца в задаче N тел в релятивистской механике приводит к теореме о движении

центра инерции. Аналогично обстоит дело и в пространстве де Ситтера. При $N=1$ эта теорема равносильна закону сохранения $d\boldsymbol{Q}/dt=0$ для вектора

$$\boldsymbol{Q}=\frac{m}{\theta\sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}}(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{v}). \tag{23.8}$$

Легко проверить, что оператор X_{12} (или любой из операторов вращения $X_{\mu\nu}$) порождает 10-мерную алгебру с базисом (8.16). Поэтому в качестве базиса интегралов (23.5)—(23.8) можно взять одну из компонент вектора углового момента (23.7) (см. следствие теоремы 22.4). Это означает, что все эти интегралы можно получить из одной компоненты вектора $\boldsymbol{M}$ действием операторов (8.16), продолженных на первые производные $\dot{x}^i$.

23.2. Уравнение $u_{tt}+\Delta^2 u=0$. На этом примере иллюстрируется применение формулы (22.9) к лагранжианам, зависящим от производных порядка >1. Для $\mathscr{L}=\mathscr{L}(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u})$ формулы (22.9), (22.3) дают

$$C^i=\mathscr{L}\xi^i+(\eta^\alpha-\xi^k u_k^\alpha)\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i^\alpha}-D_j\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{ij}^\alpha}\right)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{ij}^\alpha}D_j(\eta^\alpha-\xi^k u_k^\alpha). \tag{23.9}$$

Рассматриваемое здесь уравнение поперечного колебания пластинок имеет лагранжиан

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}u_t^2-(\Delta u)^2, \quad \text{где } \Delta=D_x^2+D_y^2. \tag{23.10}$$

Для однопараметрической группы переносов $t'=t+a$ применение формулы (23.9) к лагранжиану (23.10) дает закон сохранения

$$D_t(u_t^2+(\Delta u)^2)+\operatorname{div}(2u_t\nabla(\Delta u)-\Delta u\nabla u_t)=0.$$

Инвариантность по отношению к группе вращений в плоскости (x, y) приводит к закону сохранения

$$D_t(\omega u_t)+\operatorname{div}(\omega\nabla(\Delta u)-\Delta u\nabla\omega+\mathscr{L}\lambda)=0,$$

где $\omega=xu_y-yu_x$, $\lambda=(y, -x)$. Элементарное действие инвариантно также относительно 2-параметрической группы переносов $x'^i=x^i+a^i$, $i=1, 2$, где $x^1=x$, $x^2=y$. Соответствующие законы сохранения можно записать в виде

$$D_t(\tau^i)+D_j(\gamma^{ij})=0, \qquad i=1, 2,$$

где $\tau^i=u_t u_i$, $\gamma^{ij}=u_i\Delta u_j-u_{ij}\Delta u$, $i, j=1, 2$.

23.3. Нестационарное околозвуковое течение газа. Уравнение

$$2u_{tx}+u_x u_{xx}-u_{yy}=0, \tag{23.11}$$

описывающее нестационарное потенциальное течение газа с

околозвуковыми скоростями, имеет лагранжиан

$$\mathscr{L} = -u_t u_x - \frac{1}{6} u_x^3 + \frac{1}{2} u_y^2 \tag{23.12}$$

и допускает бесконечную группу точечных преобразований с каноническим оператором

$$\overline{X} = f \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{23.13}$$

где

$$f = 3\alpha u_t + (\alpha' x + \alpha'' y^2 + \beta' y + \gamma) u_x + (2\alpha' y + \beta) u_y + \alpha' u - \alpha'' x^2 - \\ - 2\alpha''' xy^2 + \frac{1}{3} \alpha^{(4)} y^4 - 2\beta'' xy - \frac{2}{3} \beta''' y^3 - 2\gamma' x - 2\gamma'' y^2 + \sigma y + \tau. \tag{23.14}$$

Здесь α, β, γ, σ, τ — произвольные функции от t, $\alpha' = d\alpha/dt$, ... Максимальная группа, допускаемая уравнением (23.11), получается добавлением растяжений $t \mapsto a^2 t$, $x \mapsto x$, $y \mapsto ay$, $u \mapsto a^{-2} u$, которым не соответствует закон сохранения.

Оператор (23.13) может служить иллюстрацией к замечанию 22.2. Например, пусть в (23.14) отлична от нуля только одна функция σ. Тогда оператор (23.13) (продолженный на первые производные) равен

$$\overline{X}_\sigma = \sigma y \frac{\partial}{\partial u} + \sigma' y \frac{\partial}{\partial u_t} + \sigma \frac{\partial}{\partial u_y}$$

и удовлетворяет соотношению вида (22.13) (в данном случае $D_i \xi^i = 0$):

$$\overline{X}^\sigma (\mathscr{L}) = D_x (-\sigma' y u) + D_y (\sigma u).$$

Соотношение (22.13) выполняется и в общем случае, поэтому уравнение (23.11) имеет бесконечное семейство законов сохранения

$$D_t (C^1) + D_x (C^2) + D_y (C^3) = 0, \tag{23.15}$$

зависящее от пяти произвольных функций $\alpha(t)$, ..., $\tau(t)$. Все эти законы сохранения можно выписать с помощью формул (22.9), (22.13), однако проще воспользоваться теоремой 22.4 и ее следствием. Для этого сначала нужно найти минимальное множество элементов, порождающее бесконечномерную алгебру L операторов (23.13), (23.14). Построив присоединенную алгебру*) L^A, нетрудно заметить, что алгебра L порождена одним элементом, в качестве которого можно взять оператор группы переносов

*) Для вычисления коммутаторов удобнее перейти от канонического оператора (23.13) к эквивалентному оператору группы точечных преобразований $X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial u}$ по формуле (16.17).

$t \mapsto t+a$,

$$X=\frac{\partial}{\partial t}, \tag{23.16}$$

соответствующий функции f с $\alpha=\text{const}$, $\beta=\gamma=\sigma=\tau=0$. Следовательно, теорему Нётер достаточно применить к оператору (23.16), а затем воспользоваться леммой 22.4. Когда лагранжиан не зависит от производных высшего порядка, формула (22.9) принимает вид (см. (23.9))

$$C^i=\mathscr{L}\xi^i+(\eta^\alpha-\xi^k u_k^\alpha)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i^\alpha}. \tag{23.17}$$

Применив эту формулу к оператору (23.16), получаем вектор C_0:

$$C_0^1=\frac{1}{2}u_y^2-\frac{1}{6}u_x^3,\qquad C_0^2=u_t^2+\frac{1}{2}u_x^2,\qquad C_0^3=-u_t u_y,$$

задающий базис законов сохранения для уравнения (23.11). Теперь осталось подействовать на этот вектор оператором (23.13). Ограничимся вычислением плотности (т. е. C^1) законов сохранения (23.15), опуская несущественные слагаемые вида $D_x(\varphi)+D_y(\psi)$. Функциям σ и τ соответствует тривиальная плотность, поэтому в (23.14) берется $\sigma=\tau=0$. Окончательно получается следующее значение плотности общего закона сохранения:

$$C^1=-\frac{1}{2}\alpha u_x^3+(\alpha' x+\alpha'' y^2+\beta' y+\gamma)u_x^2+\frac{3}{2}\alpha u_y^2+(2\alpha' y+\beta)u_x u_y+$$
$$+\Big(\alpha' u-\alpha'' x^2-2\alpha''' xy^2-\frac{1}{3}\alpha^{(4)}y^4-2\beta''' xy-\frac{2}{3}\beta''' y^3-2\gamma' x-$$
$$-2\gamma'' y^2\Big)u_x+2(\alpha'' x+\alpha''' y^2+\beta'' y+\gamma')u.$$

Аналогично рассматривается уравнение

$$2u_{tx}+u_x u_{xx}-u_{yy}-u_{zz}=0 \tag{23.18}$$

для пространственного околозвукового течения газа. Функция Лагранжа для него имеет вид

$$\mathscr{L}=-u_t u_x-\frac{1}{6}u_x^3+\frac{1}{2}(u_y^2+u_z^2), \tag{23.19}$$

а максимальная группа точечных преобразований определяется бесконечномерной алгеброй с базисом

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=5t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+3y\frac{\partial}{\partial y}+3z\frac{\partial}{\partial z}-3u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_3=t\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}-3u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_4=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_5=\frac{5}{2}t^2\frac{\partial}{\partial t}+\Big(tx+\frac{3}{2}(y^2+z^2)\Big)\frac{\partial}{\partial x}+3ty\frac{\partial}{\partial y}+3tz\frac{\partial}{\partial z}+(x^2-3tu)\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_0=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\alpha(t)\frac{\partial}{\partial y}+\beta(t)\frac{\partial}{\partial z}+\eta\frac{\partial}{\partial u},$$

где

$$\xi = \alpha'(t)\,y + \beta'(t)\,z + \gamma(t),$$

$$\eta = 2xD_t(\xi) + (y^2+z^2)\,D_t^2(\xi) + \frac{2}{3}D_t^3(\alpha y^3 + \beta z^3) + \varphi(t,\ y,\ z),$$

α, β, γ — произвольные функции от t, $\varphi(t,\ y,\ z)$ — решение уравнения Лапласа $(D_y^2 + D_z^2)\,\varphi = 0$, зависящее от t как от параметра. Уравнение (23.18) также имеет бесконечное семейство законов сохранения

$$D_t(C^1) + D_x(C^2) + D_y(C^3) + D_z(C^4) = 0.$$

В данном случае базис образуют два вектора C и C', соответствующие операторам X_1 и X_4:

$$C^1 = \mathscr{L} + u_t u_x, \quad C^2 = u_t\left(u_t + \frac{1}{2}u_x^2\right), \quad C^3 = -u_t u_y, \quad C^4 = -u_t u_z;$$

$$C'^1 = \omega u_x,\ C'^2 = \omega\left(u_t + \frac{1}{2}u_x^2\right),\ C'^3 = -\omega u_y - z\mathscr{L},\ C'^4 = -\omega u_z + y\mathscr{L}.$$

Здесь $\mathscr{L}$ — лагранжиан (23.19), $\omega = zu_y - yu_z$.

23.4. Короткие волны. Система уравнений

$$u_y - 2v_t - 2(v-x)\,v_x - 2kv = 0, \qquad k = \text{const},$$
$$v_y + u_x = 0,$$

описывающая распространение «коротких волн» в газовой динамике, заменой $u = w_y$, $v = -w_x$ сводится к уравнению второго порядка

$$2w_{tx} - 2(x + w_x)\,w_{xx} + w_{yy} + 2kw_x = 0 \tag{23.20}$$

с лагранжианом

$$\mathscr{L} = \left(w_t w_x - \frac{1}{3}w_x^3 - xw_x^2 + \frac{1}{2}w_y^2\right)e^{2(k+1)t}. \tag{23.21}$$

Уравнение (23.20) допускает бесконечную группу, инфинитезимальный оператор которой эквивалентен каноническому оператору Ли — Беклунда

$$\overline{X} = f\frac{\partial}{\partial w} + \ldots \tag{23.22}$$

с координатой

$$f = aw_t + (bx + \alpha' y - \beta)\,w_x + \left(\frac{b}{2}y - \alpha\right)w_y - 2bw + (\alpha'' + \alpha')\,xy -$$
$$-(\beta' + \beta)\,x - \frac{y^3}{3}d_k(\alpha') + y^2 d_k(\beta) + \sigma y + \tau, \tag{23.23}$$

где a, $b = \text{const}$, α, β, σ, τ — произвольные функции от t, $\alpha' = d\alpha/dt$, $\ldots$, $d_k = \frac{d^2}{dt^2} + (k+1)\frac{d}{dt} + k$. Указанная группа допускается при произвольном значении k, хотя по физическому содержа-

нию задачи постоянная k принимает только значения 0 или 1 (для плоских и осесимметрических волн соответственно). Интересно отметить, что в результате групповой классификации уравнений (23.20) с произвольным параметром k выделяются особые значения $k=2$ и $k=1/2$, при которых происходит расширение группы: к (23.23) добавляется функция (Хамитова [1])

$$\begin{aligned} g = {} & 9\gamma w_t + [(3\gamma' - 4(k+1)\gamma)x - (3\gamma'' - (k+1)\gamma')y^2]w_x + \\ & + (6\gamma' - 2(k+1)\gamma)yw_y + (3\gamma' + 8(k+1)\gamma)w + \\ & + (3\gamma'' + (5-4k)\gamma')\frac{x^2}{2} - (3\gamma''' + (2-k)\gamma'' - (k+1)\gamma')xy^2 + \\ & + (3\gamma^{(4)} + 2(k+1)\gamma''' - (k^2-k+1)\gamma'' - k(k+1)\gamma')\frac{y^4}{6}, \end{aligned} \tag{23.24}$$

где γ — произвольная функция от t.

Рассматриваемое уравнение имеет бесконечное семейство законов сохранения. Как и в случае уравнения (23.11), функциям σ и τ из (23.23) соответствует закон сохранения с тривиальной плотностью, поэтому можно положить $\sigma=\tau=0$. Кроме того, для применимости теоремы Нётер постоянные a и b должны удовлетворять условию $4(k+1)a+9b=0$. Пусть это условие выполнено, а все произвольные функции от t в формуле (23.23) выбраны равными нулю, т. е. оператор (23.22) имеет координату

$$f_0 = -9w_t + 4(k+1)xw_x + 2(k+1)yw_y - 8(k+1)w. \tag{23.25}$$

Его можно записать в виде оператора однопараметрической группы точечных преобразований

$$X_0 = 9\frac{\partial}{\partial t} - 4(k+1)x\frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)y\frac{\partial}{\partial y} - 8(k+1)w\frac{\partial}{\partial w} \tag{23.26}$$

и по теореме Нётер построить соответствующий ему закон сохранения с вектором (в обозначениях (23.15))

$$\begin{aligned} & C^1 = f_0\varepsilon w_x + 9\mathscr{L},\ C^2 = f_0\varepsilon(w_t - w_x^2 - 2xw_x) - 4(k+1)\mathscr{L}, \\ & C^3 = f_0\varepsilon w_y - 2(k+1)y\mathscr{L}, \end{aligned} \tag{23.27}$$

где $\mathscr{L}$ — лагранжиан (23.21), f_0 — функция (23.25), $\varepsilon = e^{2(k+1)t}$. Этим решена задача построения законов сохранения для уравнения (23.20), так как оператор (23.26) порождает алгебру, состоящую из операторов вида (23.22)—(23.24). Следовательно, вектор (23.27) задает базис законов сохранения.

§ 24. Группа Лоренца

24.1. Законы сохранения в релятивистской механике. Рассматривается свободное движение частицы (материальной точки) в пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = c^2(dx^4)^2 - \sum_{\mu=1}^{3}(dx^\mu)^2. \tag{24.1}$$