ГЛАВА I

Полунормы

Полунорма вектора линейного пространства является некоторым аналогом понятия длины. Чтобы ввести в бесконечномерном линейном пространстве топологию, удобную для приложений к задачам классического и современного анализа, иногда необходимо использовать систему бесконечного числа полунорм. Одна из больших заслуг математиков группы Бурбаки состоит в том, что они показали, как важно для функционального анализа изучение *локально выпуклых пространств*, определяемых с помощью системы полунорм, удовлетворяющих *аксиоме отделимости*. В случае когда такая система полунорм сводится к единственной полунорме, соответствующее линейное пространство называется *нормированным линейным пространством*. Если, кроме того, это пространство полно по отношению к топологии, определенной указанной полунормой, то оно называется *банаховым пространством*. Понятие полного нормированного линейного пространства независимо друг от друга ввели около 1922 г. С. Банах и Н. Винер. Некоторое видоизменение понятия нормы, которое мы в данной книге называем *квазинормой*, было предложено М. Фреше. Мы рассмотрим также некоторый специальный вид предельного перехода — *индуктивный предел* локально выпуклых пространств, который используется при изучении *обобщенных функций*, или *распределений*; соответствующая теория была развита Л. Шварцем на основе обобщения понятия функции, предложенного С. Л. Соболевым.

1. Полунормы и локально выпуклые линейные топологические пространства

Как было сказано во введении, понятие полунормы играет важную роль при изучении линейных топологических пространств. Мы начнем с определения полунормы.

Определение 1. Вещественная функция $p(x)$, заданная на линейном пространстве X, называется *полунормой*, если выполняются следующие условия:

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad (\textit{полуаддитивность}), \tag{1}$$

$$p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x). \tag{2}$$

Пример 1. Евклидово n-мерное пространство R^n точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является n-мерным линейным пространством относительно операций

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

В этом пространстве функция $p(x)=\max\limits_{1\leqslant y\leqslant n}|x_j|$ представляет собой полунорму. Как будет показано далее, функция $p(x)=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^q\right)^{1/q}$ при $q\geqslant 1$ тоже является полунормой в R^n.

Предложение 1. Всякая полунорма $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p(0)=0; \tag{3}$$

$$p(x_1-x_2)\geqslant|p(x_1)-p(x_2)|; \quad \text{в частности,} \quad p(x)\geqslant 0. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем $p(0)=p(0\cdot x)=0\cdot p(x)=0$. В силу полуаддитивности $p(x_1-x_2)+p(x_2)\geqslant p(x_1)$, и поэтому $p(x_1-x_2)\geqslant$ $\geqslant p(x_1)-p(x_2)$. Таким образом, $p(x_1-x_2)=|-1|\cdot p(x_2-x_1)\geqslant$ $\geqslant p(x_2)-p(x_1)$, откуда следует (4).

Предложение 2. Пусть $p(x)$—некоторая полунорма в X, c—любое положительное число. Тогда множество $M=\{x\in X;\ p(x)\leqslant c\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$M\ni 0; \tag{5}$$

M выпукло, т. е. если $x, y\in M$ и $0<\alpha<1$, то

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in M; \tag{6}$$

M уравновешено, т. е. если $x\in M$ и $|\alpha|\leqslant 1$, то $\alpha x\in M$; (7)

M является *поглощающим*, т. е. для любого $x\in X$

$$\text{существует такое } \alpha>0, \text{ что } \alpha^{-1}x\in M; \tag{8}$$

$$p(x)=\inf_{\alpha>0,\ \alpha^{-1}x\in M}\alpha c. \tag{9}$$

Доказательство. Свойство (5) следует из (3); (7) и (8) вытекают из (2). Утверждение (6) является следствием полуаддитивности (1) и условия (2). Наконец, справедливость соотношения (9) вытекает из эквивалентности следующих трех предложений:

$$[\alpha^{-1}x \in M] \rightleftarrows [p(\alpha^{-1}x) \leqslant c] \rightleftarrows [p(x) \leqslant \alpha c] \quad (\alpha > 0).$$

Определение 2. Функционал

$$p_M(x) = \inf_{\alpha > 0,\ \alpha^{-1}x \in M} \alpha \tag{9'}$$

называется *функционалом Минковского*[1]) выпуклого уравновешенного поглощающего множества M пространства X.

Предложение 3. Пусть некоторое семейство $\{p_\gamma(x);\ \gamma \in \Gamma\}$ полунорм линейного пространства X удовлетворяет следующей *аксиоме отделимости*:

для всякого $x_0 \neq 0$ существует полунорма $p_{\gamma_0}(x)$

из этого семейства, такая, что $p_{\gamma_0}(x_0) \neq 0$. (10)

Выберем некоторую конечную систему полунорм из этого семейства, скажем $p_{\gamma_1}(x)$, $p_{\gamma_2}(x)$, ..., $p_{\gamma_n}(x)$, и систему n положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ и рассмотрим множество

$$U = \{x \in X;\ p_{\gamma_j}(x) \leqslant \varepsilon_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)\}. \tag{11}$$

Тогда U — выпуклое уравновешенное поглощающее множество. Будем теперь рассматривать множества вида U как окрестности вектора $x = 0$ пространства X; за окрестности любого другого вектора x_0 примем по определению множества вида

$$x_0 + U = \{y \in X;\ y = x_0 + u,\ u \in U\}. \tag{12}$$

Рассмотрим множество G пространства X, содержащее некоторую окрестность каждой из своих точек. Тогда совокупность $\{G\}$ всех таких подмножеств G удовлетворяет аксиоме открытых множеств, приведенной в § 2 введения.

Доказательство. Сначала мы покажем, что всякое множество G_0 вида $G_0 = \{x \in X;\ p_\gamma(x) < c\}$ является открытым в смысле данного выше определения. Пусть $x_0 \in G_0$ и $p_\gamma(x_0) = \beta < c$. Тогда окрестность $x_0 + U$ точки x_0, где $U = \{x \in X;\ p_\gamma(x) \leqslant 2^{-1}(c - \beta)\}$, содержится в G_0, так как если $u \in U$, то $p_\gamma(x_0 + u) \leqslant p_\gamma(x_0) + p_\gamma(u) < \beta + (c - \beta) = c$.

[1]) Применяется также название *опорная функция* (или *функция Минковского*). — *Прим. перев.*

Следовательно, для всякой точки $x_0 \in X$ существует открытое множество вида $x_0 + G_0$, содержащее x_0.

Ясно, что объединение любого числа и пересечение конечного числа определенных выше открытых множеств также являются открытыми множествами.

Таким образом, нам остается лишь показать, что выполняется аксиома отделимости Хаусдорфа: если $x_1 \neq x_2$, то существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2, такие, что

$$x_1 \in G_1, \qquad x_2 \in G_2. \tag{13}$$

Так как окрестность любой точки x_i определяется соотношением (12), достаточно доказать (13) для случая $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$. Согласно (10), мы можем выбрать $p_{\gamma_2}(x)$ так, что $p_{\gamma_2}(x) = \alpha > 0$. Тогда множество $G_1 = \{x \in X;\ \ p_{\gamma_2}(x) < \alpha/2\}$, как было показано выше, — открытое. Разумеется, $G_1 \ni 0 = x_1$. Остается показать, что множества G_1 и $G_2 = x_2 + G_1$ не имеют общих точек. Допустим противное: пусть существует $y \in G_1 \cap G_2$. Так как $y \in G_2$, то $y = x_2 + g = x_2 - (-g)$, где g — некоторая точка, принадлежащая G_1, и поэтому из неравенства (4) следует, что $p_{\gamma_2}(y) \geqslant p_{\gamma_2}(x_2) - p(-g) \geqslant \alpha - 2^{-1}\alpha = \alpha/2$, поскольку $-g$, так же как и g, принадлежит G_1. Но $y \in G_1$, и поэтому $p_{\gamma_2}(y) < \alpha/2$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Предложение 4. Если принять определенные выше множества G за открытые, то X станет *линейным топологическим* пространством, т. е. линейным и одновременно топологическим пространством, для которого непрерывны отображения $X \times X \to X$: $(x, y) \to x + y$ и $K \times X \to X$: $(\alpha, x) \to \alpha x$. Кроме того, каждая из полунорм $p_\gamma(x)$ есть непрерывная функция на X.

Доказательство. Для любой окрестности U точки $x = 0$ существует окрестность V этой же точки, такая, что

$$V + V = \{w \in X;\ \ w = v_1 + v_2, \ \text{ где } \ v_1, v_2 \in V\} \subseteq U,$$

так как полунорма полуаддитивна. Следовательно, отображение $(x, y) \to x + y$ непрерывно при $x = x_0$, $y = y_0$, так как

$$(x + y) - (x_0 + y_0) = (x - x_0) + (y - y_0).$$

Для любой окрестности U точки $x = 0$ и всякого скаляра $\alpha \neq 0$ множество $\alpha U = \{x \in X;\ \ x = \alpha u,\ u \in U\}$ в свою очередь является окрестностью точки $x = 0$. Поэтому из соотношения (2) и равенства

$$\alpha x - \alpha_0 x_0 = \alpha(x - x_0) - (\alpha - \alpha_0) x_0$$

мы заключаем, что отображение $(\alpha, x) \to \alpha x$ непрерывно при $\alpha = \alpha_0$, $x = x_0$.

Непрерывность полунормы $p_\gamma(x)$ во всякой точке $x = x_0$ следует из неравенства $|p_\gamma(x) - p_\gamma(x_0)| \leqslant p_\gamma(x - x_0)$.

Определение 3. Линейное топологическое пространство X называется *локально выпуклым линейным топологическим пространством*, или, короче, *локально выпуклым пространством*, если всякое открытое множество этого пространства, содержащее точку $x = 0$, содержит также некоторое выпуклое уравновешенное и поглощающее открытое множество.

Предложение 5. Функционал Минковского $p_M(x)$ всякого выпуклого уравновешенного и поглощающего подмножества M линейного пространства X представляет собой некоторую полунорму на X.

Доказательство. Так как M — выпуклое множество, из включений

$$\frac{x}{p_M(x)+\varepsilon} \in M, \qquad \frac{y}{p_M(y)+\varepsilon} \in M \text{ при любом } \varepsilon > 0$$

следует, что

$$\frac{p_M(x)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon} \cdot \frac{x}{p_M(x)+\varepsilon} + \frac{p_M(y)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon} \cdot \frac{y}{p_M(y)+\varepsilon} \in M,$$

и поэтому $p_M(x+y) \leqslant p_M(x) + p_M(y) + 2\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ взято произвольно, отсюда следует, что функция $p_M(x)$ полуаддитивна. Аналогично, из того что M — уравновешенное множество, вытекает соотношение $p_M(\alpha x) = |\alpha| p_M(x)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема. Всякое линейное пространство X, топологизированное указанным выше способом с помощью некоторого семейства полунорм $p_\gamma(x)$, удовлетворяющего аксиоме отделимости (10), является локально выпуклым пространством, в котором каждая полунорма $p_\gamma(x)$ непрерывна. Обратно, всякое локально выпуклое пространство представляет собой некоторое линейное топологическое пространство, топологизированное с помощью семейства полунорм, за которые можно принять функционалы Минковского выпуклых уравновешенных и поглощающих открытых множеств пространства X [1]).

Определение 4. Пусть $f(x)$ — комплексная функция, заданная на некотором открытом множестве Ω пространства R^n. *Носителем*

---

[1]) Для дальнейшего полезна следующая эквивалентная формулировка этого предложения: топология всякого локально выпуклого линейного топологического пространства X может быть определена семейством полунорм, состоящим из всех непрерывных в этой топологии полунорм, заданных на X. — *Прим. перев.*

supp(f) функции $f(x)$ называется наименьшее замкнутое множество (топологического пространства Ω), содержащее множество $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Иными словами, носитель $f(x)$ — это наименьшее замкнутое множество пространства Ω, вне которого функция $f(x)$ тождественно равна нулю.

Определение 5. Обозначим через $C^k(\Omega)$ $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ совокупность всех комплексных функций, определенных на множестве Ω, которые имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно (бесконечно дифференцируемых, если $k = \infty$). Символом $C_0^k(\Omega)$ обозначим подмножество функций из $C^k(\Omega)$, носители которых являются бикомпактными подмножествами Ω (мы назовем их функциями с *бикомпактными носителями*). Классический пример функции из множества $C_0^\infty(R^n)$ представляет собой функция $f(x)$, определяемая условиями

$$f(x) = \begin{cases} \exp(|x|^2 - 1)^{-1} & \text{при} \quad |x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2} < 1, \\ 0 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 1. & \end{cases} \tag{14}$$

Пространство $\mathfrak{E}^k(\Omega)$

Множество $C^k(\Omega)$ является линейным пространством относительно операций

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Для всякого бикомпактного подмножества K из Ω и любого неотрицательного целого числа $m \leqslant k$ $(m < \infty$ при $k = \infty)$ определим полунорму

$$p_{K,m}(f) = \sup_{|s| \leqslant m,\ x \in K} |D^s f(x)|, \qquad f \in C^k(\Omega),$$

где

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n), \qquad |s| = |(s_1, s_2, \ldots, s_n)| = \sum_{j=1}^{n} s_j,$$

$$D^s f(x) = \frac{\partial^{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}}{\partial x_1^{s_1}\, \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_n^{s_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда введение в множестве $C^k(\Omega)$ топологии, определяемой построенным выше семейством полунорм, превращает его в локально выпуклое топологическое пространство, которое мы обозначим через $\mathfrak{E}^k(\Omega)$.

Предельный переход $\lim_{h\to\infty} f_h = f$ в этом пространстве $\mathfrak{E}^k(\Omega)$ совпадает с равномерной сходимостью $\lim_{h\to\infty} D^s f_h(x) = D^s f(x)$ на всяком бикомпактном подмножестве K множества Ω при любом значении s, $|s| \leqslant k$ ($|s| < \infty$, если $k = \infty$).

Предложение 6[1]. Пространство $\mathfrak{E}^k(\Omega)$ является метрическим.

Доказательство. Пусть $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n \subseteq \ldots$ — некоторая монотонно возрастающая последовательность бикомпактных подмножеств из Ω, такая, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Определим для каждого положительного целого числа h функцию расстояния

$$d_h(f, g) \equiv \sum_{m=0}^{k} 2^{-m} p_{K_h, m}(f-g) \cdot \left(1 + p_{K_h, m}(f-g)\right)^{-1}.$$

Тогда сходимость $\lim_{s\to\infty} f_s = f$ в пространстве $\mathfrak{E}^k(\Omega)$ определяется расстоянием

$$d(f, g) = \sum_{h=1}^{\infty} 2^{-h} d_h(f, g) \cdot (1 + d_h(f, g))^{-1}.$$

Мы должны еще показать, что функции $d_h(f, g)$ и $d(f, g)$ удовлетворяют неравенству треугольника. Для $d_h(f, g)$ неравенство треугольника выводится следующим образом: полуаддитивность полунормы $p_{K_h, m}(f)$ позволяет заключить, что неравенство треугольника

$$d_h(f, g) \leqslant d_h(f, \varphi) + d_h(\varphi, g) \quad (f, \varphi, g \in \mathfrak{E}^k(\Omega))$$

выполняется, если при любых комплексных α, β и γ справедливо неравенство

$$|\alpha-\beta| \cdot (1 + |\alpha-\beta|)^{-1} \leqslant |\alpha-\gamma|(1 + |\alpha-\gamma|)^{-1} + \\ + |\gamma-\beta|(1 + |\gamma-\beta|)^{-1}.$$

Это последнее неравенство нетрудно вывести из другого неравенства, справедливого для любых неотрицательных вещественных α, β и γ:

$$(\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta)^{-1} \leqslant \alpha(1+\alpha)^{-1} + \beta(1+\beta)^{-1}.$$

Для функции $d(f, g)$ неравенство треугольника доказывается аналогичным образом.

Определение 6. Пусть X — линейное пространство, а $\{X_\alpha\}$ — семейство линейных подпространств из X, такое, что X есть объединение множеств X_α. Предположим, что все X_α — локально выпук-

[1]) Если в топологическом пространстве X можно ввести метрику, при которой топология X как метрического пространства совпадает с исходной топологией, то говорят, что пространство X *метризуемо*. Предложение 6 утверждает, что пространство $\mathfrak{E}^k(\Omega)$ метризуемо. — *Прим. перев.*

лые линейные топологические пространства, причем для любых α_1, α_2 выполняется следующее условие: если $X_{\alpha_1} \subsetneqq X_{\alpha_2}$, то топология в X_{α_1} совпадает с относительной топологией X_{α_1} как подмножества пространства X_{α_2}. Назовем „открытыми" множествами те и только те выпуклые уравновешенные и поглощающие множества U пространства X, для которых пересечения вида $U \cap X_\alpha$ со всеми $X_\alpha \in \{X_\alpha\}$ представляют собой открытые множества пространства X_α, содержащие нулевой вектор $x = 0$ этого пространства. Если X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, топология в котором определена указанным выше образом, то X называется *индуктивным пределом* [1]) пространств X_α.

Замечание. Выберем из каждого пространства X_α некоторую выпуклую уравновешенную окрестность U_α вектора $x = 0$ этого пространства. Тогда *выпуклая оболочка* объединения $V = \bigcup_\alpha U_\alpha$, т. е. множество

$$U = \left\{ u \in X;\ u = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j,\ v_j \in V,\ \beta_j \geqslant 0\ (j = 1, 2, \ldots, n), \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1,\ n \text{ — произвольное конечное целое число} \right\},$$

очевидно, является выпуклым, уравновешенным и поглощающим, и при этом пересечения $U \cap X_\alpha$ представляют собой выпуклые и уравновешенные окрестности вектора $x = 0$ пространства X_α для всех X_α. Совокупность всех таких множеств U, соответствующих произвольному выбору окрестностей U_α, представляет собой *фундаментальную систему окрестностей* нулевого вектора $x = 0$ индуктивного предела X пространств X_α, т. е. всякая окрестность нулевого вектора индуктивного предела X пространств X_α содержит некоторое множество U, принадлежащее построенной выше совокупности. Этот факт оправдывает приведенное выше определение индуктивного предела [2]).

---

[1]) Другие определения индуктивного предела см. в книгах Бурбаки [2], Канторович — Акилов [1]. — *Прим. перев.*

[2]) Определение „оправдывается" в том смысле, что пространство X, построенное указанным способом, действительно является в силу приведенных рассуждений локально выпуклым линейным топологическим пространством, так как если в качестве множеств U_α выбрать *открытые* выпуклые уравновешенные и поглощающие окрестности нулевых векторов пространств X_α, то соответствующие множества типа U будут открытыми выпуклыми уравновешенными и поглощающими окрестностями нулевого вектора пространства X, и при этом всякая окрестность (в том числе и открытая) нулевого вектора пространства X будет содержать некоторое множество типа U. — *Прим. перев.*

Пространство $\mathfrak{D}(\Omega)$

Операции

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x), \qquad (\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

позволяют рассматривать $C_0^\infty(\Omega)$ как линейное пространство. Обозначим через $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ множество всех функций $f \in C_0^\infty(\Omega)$, таких, что $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$, где K — любое бикомпактное подмножество из Ω. Определим в $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ семейство полунорм

$$p_{K,m}(f)=\sup_{|s|\leqslant m,\ x\in K}|D^s f(x)|, \text{ где } m<\infty.$$

Тогда $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ превращается в локально выпуклое линейное топологическое пространство, причем если $K_1 \subseteq K_2$, то топология $\mathfrak{D}_{K_1}(\Omega)$ совпадает с относительной топологией $\mathfrak{D}_{K_1}(\Omega)$ как подмножества пространства $\mathfrak{D}_{K_2}(\Omega)$. Индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, где K пробегает совокупность всех бикомпактных подмножеств из Ω, является локально выпуклым линейным топологическим пространством. Топологизированное таким способом множество $C_0^\infty(\Omega)$ мы обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)$. Следует заметить, что определенная в $\mathfrak{D}(\Omega)$ функция

$$p(f)=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

— это одна из полунорм, определяющих топологию в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$. В самом деле, если мы положим $U=\{f\in C_0^\infty(\Omega);\ p(f)\leqslant 1\}$, то пересечение $U \cap \mathfrak{D}_K(\Omega)$ совпадает с множеством $U_K=\Big\{f\in\mathfrak{D}_K(\Omega);$ $p_K(f)=\sup_{x\in K}|f(x)|\leqslant 1\Big\}$.

Предложение 7. Сходимость $\lim_{h\to\infty} f_h=0$ в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$ означает, что выполняются следующие два условия: (1) в Ω существует бикомпактное подмножество K, такое, что $\operatorname{supp}(f_h) \subseteq K$ $(h=1, 2, \dots)$; (2) для любого дифференциального оператора D^s последовательность $\{D^s f_h(x)\}$ сходится к 0 равномерно на множестве K.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лишь утверждение (1). Допустим противное и предположим, что существуют последовательность $\{x^{(k)}\}$ точек множества Ω, не имеющая предельных точек в Ω, и подпоследовательность $\{f_{h_j}(x)\}$ последовательности $\{f_h(x)\}$, такая, что $f_{h_j}(x^{(j)})\neq 0$. Тогда полунорма

$$p(f)=\sum_{k=1}^{\infty} 2 \sup_{x\in K_k-K_{k-1}} \left|f(x)/f_{h_k}(x^{(k)})\right|,$$

где монотонно возрастающая последовательность бикомпактных подмножеств K_j множества Ω удовлетворяет условию $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$, причем $x^{(k)} \in K_k - K_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $K_0 = \emptyset$, определяет некоторую окрестность $U = \{f \in C_0^\infty(\Omega);\ p(f) \leqslant 1\}$ нулевого вектора пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$. Но, с другой стороны, ни одна из функций f_{h_k} не содержится в U. Это противоречие и доказывает наше утверждение.

Следствие. Сходимость $\lim_{h\to\infty} f_h = f$ в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$ означает, что выполняются следующие два условия: (1) в Ω существует такое бикомпактное подмножество K, что $\operatorname{supp}(f_h) \subseteq K$ $(h = 1, 2, \ldots)$; (2) для любого дифференциального оператора D^s последовательность $\{D^s f_h(x)\}$ сходится к $D^s f(x)$ равномерно на K.

Предложение 8 (теорема об аппроксимации). Всякая непрерывная функция $f \in C_0^0(R^n)$ может быть равномерно аппроксимирована в пространстве R^n функциями из $C_0^\infty(R^n)$.

Доказательство. Пусть $\theta_1(x)$ — функция, определенная соотношением (14); положим

$$\theta_a(x) = h_a^{-1}\theta_1(x/a), \tag{15}$$

$$\text{где } a > 0 \text{ и } h_a > 0 \text{ выбраны так, что } \int_{R^n} \theta_a(x)\,dx = 1.$$

Определим теперь *регуляризацию* f_a функции f

$$f_a(x) \equiv \int_{R^n} f(x-y)\,\theta_a(y)\,dy = \int_{R^n} f(y)\,\theta_a(x-y)\,dy, \tag{16}$$

где $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$. Интеграл (16) сходится, так как f и θ_a имеют бикомпактные носители. Кроме того, поскольку

$$f_a(x) = \int_{\operatorname{supp}(f)} f(y)\,\theta_a(x-y)\,dy,$$

носитель функции f_a будет содержаться в сколь угодно малой окрестности носителя $\operatorname{supp}(f)$ при достаточно малом $a > 0$. Далее, дифференцируя под знаком интеграла, мы получаем

$$D^s f_a(x) = D_x^s f_a(x) = \int_{R^n} f(y)\,D_x^s\theta_a(x-y)\,dy, \tag{17}$$

и поэтому f_a принадлежит $C_0^\infty(R^n)$. Наконец, поскольку

$$\int\limits_{R^n} \theta_a(x-y)\,dy = 1,$$

имеем ($\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned} |f_a(x) - f(x)| &\leqslant \int\limits_{R^n} |f(y) - f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{|f(y)-f(x)|\leqslant\varepsilon} |f(y) - f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy + \\ &+ \int\limits_{|f(y)-f(x)|>\varepsilon} |f(y) - f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части не превосходит ε, а второе при достаточно малых $a > 0$ обращается в нуль. В самом деле, в силу равномерной непрерывности f как непрерывной функции с бикомпактным носителем существует столь малое $a > 0$, что из условия $|f(y) - f(x)| > \varepsilon$ следует неравенство $|y - x| > a$. Тем самым наше предложение доказано.

2. Нормы и квазинормы

Определение 1. Локально выпуклое пространство называется *нормированным*, если его топология определяется единственной полунормой, принимающей нулевое значение только при $x = 0$.

Таким образом, линейное пространство X называется нормированным, если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой* вектора x, такое, что выполняются следующие условия:

$$\|x\| \geqslant 0; \quad \|x\| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0; \tag{1}$$

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad (\textit{неравенство треугольни а}); \tag{2}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|. \tag{3}$$

Топология нормированного линейного пространства X определяется, следовательно, метрикой

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|. \tag{4}$$