и поэтому $f_a$ принадлежит $C_0^\infty(R^n)$. Наконец, поскольку

$$\int_{R^n} \theta_a(x-y)\,dy = 1,$$

имеем ($\varepsilon > 0$)

$$|f_a(x) - f(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(y) - f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|f(y)-f(x)|\leqslant\varepsilon} |f(y)-f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy +$$

$$+ \int_{|f(y)-f(x)|>\varepsilon} |f(y)-f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy.$$

Первое слагаемое в правой части не превосходит $\varepsilon$, а второе при достаточно малых $a > 0$ обращается в нуль. В самом деле, в силу равномерной непрерывности $f$ как непрерывной функции с бикомпактным носителем существует столь малое $a > 0$, что из условия $|f(y) - f(x)| > \varepsilon$ следует неравенство $|y - x| > a$. Тем самым наше предложение доказано.

## 2. Нормы и квазинормы

**Определение 1.** Локально выпуклое пространство называется *нормированным*, если его топология определяется единственной полунормой, принимающей нулевое значение только при $x = 0$.

Таким образом, линейное пространство $X$ называется нормированным, если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой* вектора $x$, такое, что выполняются следующие условия:

$$\|x\| \geqslant 0; \quad \|x\| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0; \tag{1}$$

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad (\textit{неравенство треугольни а}); \tag{2}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|. \tag{3}$$

Топология нормированного линейного пространства $X$ определяется, следовательно, метрикой

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|. \tag{4}$$

В самом деле, нетрудно убедиться в том, что функция $d(x, y)$ удовлетворяет *аксиоме расстояния*:

$$d(x, y) \geqslant 0; \quad d(x, y) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = y;$$

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \text{ (неравенство треугольника)};$$

$$d(x, y) = d(y, x).$$

Действительно, $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$ и $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$ согласно (1), (2), (3) и (4).

Сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ в нормированном пространстве $X$ мы будем обозначать записью $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или просто $x_n \to x$ и будем при этом говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *сильно сходится* к элементу $x$. Термин „сильная" сходимость вводится, чтобы отличить этот вид предельного перехода от „слабой" сходимости, которая будет определена позже.

**Предложение 1.** В нормированном линейном пространстве $X$ выполняются следующие условия:

$$\text{если } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|; \tag{5}$$

$$\text{если } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \text{ и } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ то } s\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x; \tag{6}$$

$$\text{если } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ и } s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y, \text{ то } s\text{-}\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y. \tag{7}$$

**Доказательство.** Условия (5), (6) и (7) уже доказаны, поскольку $X$ — локально выпуклое пространство, топологизированное с помощью единственной полунормы $p(x) = \|x\|$. Однако можно провести и прямое доказательство. По определению полунормы

$$\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||, \tag{8}$$

откуда следует (5). Свойство (7) вытекает из неравенства $\|(x + y) - (x_n + y_n)\| = \|(x - x_n) + (y - y_n)\| \leqslant \|x - x_n\| + \|y - y_n\|$. Наконец, из неравенств $\|\alpha x - \alpha_n x_n\| \leqslant \|\alpha x - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha_n x_n\| \leqslant |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x\| + |\alpha_n| \cdot \|x - x_n\|$ и ограниченности последовательности $\{\alpha_n\}$ мы выводим (6).

**Определение 2.** Линейное пространство $X$ называется *квазинормированным линейным пространством*, если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое *квазинормой*[1]) вектора $x$, таким образом, что выполняются условия (1), (2) и

$$\|-x\|=\|x\|, \quad \lim_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0 \quad \text{и} \quad \lim_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0. \tag{3'}$$

**Предложение 2.** В квазинормированном линейном пространстве $X$ выполняются условия (5), (6) и (7).

**Доказательство.** Ясно, что в доказательстве нуждается лишь соотношение (6). Из доказательства предыдущего предложения видно, что для этого необходимо доказать следующее утверждение:

$$\begin{gathered}\text{если } \lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0, \text{ то } \lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=0,\\ \text{причем сходимость равномерна по } \alpha \text{ на всяком}\\ \text{ограниченном множестве значений } \alpha.\end{gathered} \tag{9}$$

Мы приводим здесь не опубликованное ранее доказательство утверждения (9), принадлежащее Какутани. Рассмотрим функционал $p_n(\alpha)=\|\alpha x_n\|$, определенный на линейном пространстве $R^1$ вещественных чисел, в котором норма определена как абсолютная величина. Из неравенства треугольника для $p_n(\alpha)$ и условия (3′) следует, что функционал $p_n(\alpha)$ непрерывен в $R^1$. Значит, из условия $\lim_{n\to\infty} p_n(\alpha)=0$, согласно (3′) и теореме Егорова (введение, § 3), можно заключить, что существует некоторое измеримое по Бэру множество $A$ вещественной прямой $R^1$, обладающее следующим свойством:

$$\begin{gathered}\text{мера Лебега } |A| \text{ множества } A \text{ положительна}\\ \text{и } \lim_{n\to\infty} p_n(\alpha)=0 \text{ при } \alpha\in A, \text{ причем сходимость}\\ \text{равномерна по } \alpha\in A.\end{gathered} \tag{10}$$

Так как мера Лебега на вещественной прямой непрерывна относительно сдвига, имеем

$$|(A+\sigma)\ominus A|\to 0 \quad \text{при} \quad \sigma\to 0,$$

где через $B\ominus C$ обозначена симметрическая разность $B\cup C - B\cap C$. Поэтому существует такое положительное число $\sigma_0$, что при $|\sigma|\leqslant\sigma_0$ справедливо неравенство $|(A+\sigma)\ominus A|<|A|/2$ и, следовательно, $|(A+\sigma)\cap A|>0$. Таким образом, для любого вещественного числа $\sigma$,

[1]) Термин „квазинорма" иногда употребляется в несколько ином смысле (см., например, Плеснер [1*]). Величину, названную здесь квазинормой, называют иногда просто нормой (например, Данфорд — Шварц [1]). — *Прим. перев.*

удовлетворяющего условию $|\sigma| \leqslant \sigma_0$, справедливо представление

$$\sigma = \alpha - \alpha', \quad \text{где} \quad \alpha \in A, \quad \alpha' \in A.$$

Но тогда на основании неравенства $p_n(\sigma) = p_n(\alpha - \alpha') \leqslant p_n(\alpha) + p_n(\alpha')$ мы можем заключить, что

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\sigma) = 0 \text{ равномерно относительно } \sigma, \text{ для которых } |\sigma| \leqslant \sigma_0.$$

Пусть $M$ — произвольное положительное число. Тогда, выбирая некоторое положительное число $k \geqslant M/\sigma_0$ и учитывая, что $p_n(k\sigma) \leqslant kp_n(\sigma)$, мы устанавливаем, что условие (9) действительно выполняется при $|\alpha| \leqslant M$.

**Замечание.** Приведенное выше доказательство легко модифицировать так, что оно будет применимо и для комплексных квазинормированных пространств $X$.

Как и в случае нормированных линейных пространств, предельный переход $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ в квазинормированном линейном пространстве мы будем записывать в виде $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или просто $x_n \to x$ и будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *сильно сходится к* $x$.

**Пример.** Пусть в локально выпуклом пространстве $X$ топология определена с помощью счетного числа полунорм $p_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $X$ является квазинормированным пространством с квазинормой

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p_n(x)(1 + p_n(x))^{-1}.$$

В самом деле, в этом случае сходимость $\lim\limits_{h\to\infty} p_n(x_h) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ эквивалентна тому, что $s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} x_h = 0$ по отношению к определенной выше квазинорме $\|x\|$.

### 3. Примеры нормированных линейных пространств

**Пример 1.** Пространство $C(S)$. Пусть $S$ — некоторое топологическое пространство. Рассмотрим множество $C(S)$ всех вещественных (или комплексных) ограниченных непрерывных функций $x(s)$, заданных на $S$. Множество $C(S)$ с операциями

$$(x + y)(s) = x(s) + y(s), \qquad (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$$