удовлетворяющего условию $|\sigma| \leqslant \sigma_0$, справедливо представление

$$\sigma = \alpha - \alpha', \quad \text{где} \quad \alpha \in A, \quad \alpha' \in A.$$

Но тогда на основании неравенства $p_n(\sigma) = p_n(\alpha - \alpha') \leqslant p_n(\alpha) + p_n(\alpha')$ мы можем заключить, что

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\sigma) = 0 \text{ равномерно относительно } \sigma, \text{ для которых } |\sigma| \leqslant \sigma_0.$$

Пусть M — произвольное положительное число. Тогда, выбирая некоторое положительное число $k \geqslant M/\sigma_0$ и учитывая, что $p_n(k\sigma) \leqslant kp_n(\sigma)$, мы устанавливаем, что условие (9) действительно выполняется при $|\alpha| \leqslant M$.

Замечание. Приведенное выше доказательство легко модифицировать так, что оно будет применимо и для комплексных квазинормированных пространств X.

Как и в случае нормированных линейных пространств, предельный переход $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ в квазинормированном линейном пространстве мы будем записывать в виде $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или просто $x_n \to x$ и будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *сильно сходится к* x.

Пример. Пусть в локально выпуклом пространстве X топология определена с помощью счетного числа полунорм $p_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда X является квазинормированным пространством с квазинормой

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p_n(x)(1 + p_n(x))^{-1}.$$

В самом деле, в этом случае сходимость $\lim\limits_{h\to\infty} p_n(x_h) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ эквивалентна тому, что $s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} x_h = 0$ по отношению к определенной выше квазинорме $\|x\|$.

3. Примеры нормированных линейных пространств

Пример 1. Пространство $C(S)$. Пусть S — некоторое топологическое пространство. Рассмотрим множество $C(S)$ всех вещественных (или комплексных) ограниченных непрерывных функций $x(s)$, заданных на S. Множество $C(S)$ с операциями

$$(x + y)(s) = x(s) + y(s), \qquad (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$$

и нормой

$$\|x\| = \sup_{s \in S} x(s)$$

образует нормированное линейное пространство. В этом пространстве формула $s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ означает равномерную сходимость последовательности $\{x_n(s)\}$ к $x(s)$.

Пример 2. Пространство $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ или, короче, $L^p(S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Обозначим через $L^p(S)$ совокупность всех вещественных (или комплексных) $\mathfrak{B}$-измеримых функций $x(s)$, заданных m-п. в. на S, таких, что $|x(s)|^p$ m-интегрируемы по S. Множество $L^p(S)$ с операциями

$$(x+y)(s) = x(s) + y(s), \qquad (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$$

является линейным пространством. Действительно, сумма $(x(s)+y(s))$ принадлежит $L^p(S)$, если обе функции $x(s)$ и $y(s)$ принадлежат $L^p(S)$; это следует из неравенства $|x(s)+y(s)|^p \leqslant 2^p(|x(s)|^p + |y(s)|^p)$. Норму в пространстве $L^p(S)$ мы определим соотношением

$$\|x\| = \left(\int_S |x(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Полуаддитивность этой нормы выражается неравенством

$$\left(\int_S |x(s)+y(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_S |x(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p} + \left(\int_S |y(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p}, \tag{2}$$

которое называется *неравенством Минковского*. При $p=1$ оно очевидно. Для доказательства неравенства Минковского в общем случае $1 < p < \infty$ нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $1 < p < \infty$. Определим *сопряженный с p показатель p'* соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3}$$

Тогда для любых двух неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \tag{4}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Функция $f(c) = \frac{c^p}{p} + \frac{1}{p'} - c$ при $c \geqslant 0$ принимает минимальное значение только в точке $c = 1$, и это значение равно 0. Полагая $c = ab^{1/(p-1)}$, мы получаем неравенство (4).

Доказательство неравенства (2). Докажем сначала *неравенство Гёльдера*

$$\int |x(s)y(s)| \leqslant \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int |y(s)|^{p'}\right)^{1/p'} \tag{5}$$

$\left(\text{для удобства мы пишем } \int z(s) \text{ вместо } \int\limits_S z(s)\,m(ds)\right)$. С этой целью допустим, что оба выражения $A = \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p}$ и $B = \left(\int |y(s)|^{p'}\right)^{1/p'}$ отличны от нуля, так как в противном случае почти всюду $x(s)y(s) = 0$, и тогда формула (5), очевидно, справедлива. Подставляя $a = |x(s)|/A$ и $b = |y(s)|/B$ в неравенство (4) и интегрируя, мы получаем

$$\frac{\int |x(s)\,y(s)|}{AB} \leqslant \frac{1}{p}\frac{A^p}{A^p} + \frac{1}{p'}\frac{B^{p'}}{B^{p'}} = 1,$$

откуда следует (5).

Теперь в силу (5) мы имеем

$$\begin{aligned}\int |x(s)+y(s)|^p &\leqslant \int |x(s)+y(s)|^{p-1} \cdot |x(s)| + \\ &+ \int |x(s)+y(s)|^{p-1} \cdot |y(s)| \leqslant \\ &\leqslant \left(\int |x(s)+y(s)|^{p'(p-1)}\right)^{1/p'} \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p} + \\ &+ \left(\int |x(s)+y(s)|^{p'(p-1)}\right)^{1/p'} \left(\int |y(s)|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Так как $p'(p-1) = p$, из последнего неравенства вытекает (2).

Замечание 1. Знак равенства в формуле (2) имеет место тогда и только тогда, когда существует такая неотрицательная постоянная c, что $x(s) = cy(s)$ m-п. в. (или $y(s) = cx(s)$ m-п. в.). Последнее следует из того, что, согласно лемме 1, в неравенстве Гёльдера (5) знак равенства может быть в том и только в том случае, когда m-п. в. $|x(s)y(s)| \geqslant 0$ и $|x(s)| = c \cdot |y(s)|^{1/(p-1)}$ $\left(\text{или } |y(s)| = c \cdot |x(s)|^{1/(p-1)}\right)$.

Замечание 2. Условие $\|x\|=\left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p}=0$ эквивалентно требованию, что $x(s)=0$ m-п. в. Будем поэтому считать всякие две функции из $L^p(S)$ эквивалентными, если их значения m-п. в. совпадают. При таком соглашении $L^p(S)$ становится нормированным линейным пространством. Предельное соотношение $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ в пространстве $L^p(S)$ иногда называют *сходимостью в среднем порядка* p последовательности функций $x_n(s)$ к функции $x(s)$.

Пример 3. Пространство $L^\infty(S)$. Определенная на множестве S $\mathfrak{B}$-измеримая функция $x(s)$ называется *существенно ограниченной*, если существует такая постоянная α, что m-п. в. $|x(s)|\leqslant\alpha$. Нижняя грань таких чисел α называется существенной верхней гранью для $|x(s)|$ и обозначается символом

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)| \quad \text{или} \quad \operatorname*{essential\,sup}_{s\in S}|x(s)|.$$

Пространство $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ или, короче, $L^\infty(S)$ — это множество всех $\mathfrak{B}$-измеримых существенно ограниченных функций, заданных m-п. в. в S. Введение операций

$$(x+y)(s)=x(s)+y(s), \qquad (\alpha x)(s)=\alpha x(s)$$

и нормы

$$\|x\|=\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|$$

превращает это множество в нормированное линейное пространство, если условиться считать всякие две функции из $L^\infty(S)$, значения которых совпадают m-п. в., эквивалентными.

Теорема 1. Пусть полная мера $m(S)$ множества S конечна. Тогда для всякой функции $x(s)\in L^\infty(S)$ имеем

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int\limits_S |x(s)|^p\, m(ds)\right)^{1/p}=\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|. \tag{6}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\left(\int\limits_S |x(s)|^p\, m(ds)\right)^{1/p}\leqslant m(S)^{1/p}\operatorname*{vrai\,max}_{s\in S}|x(s)|,$$

откуда $\varlimsup\limits_{p\to\infty}\left(\int\limits_S |x(s)|^p\right)^{1/p}\leqslant\operatorname*{vrai\,max}\limits_{s\in S}|x(s)|$. Но по определению величины $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{s\in S}|x(s)|$ для всякого $\varepsilon>0$ существует множество B положительной m-меры, в каждой точке которого выполняется неравенство $|x(s)| \geqslant \operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} |x(s)| - \varepsilon$. Следовательно,

$$\left(\int_S |x(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p} \geqslant (m(B))^{1/p} \left(\operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} |x(s)| - \varepsilon\right).$$

Поэтому $\varliminf_{p \to \infty} \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p} \geqslant \operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} |x(s)| - \varepsilon$ и соотношение (6) действительно справедливо.

Пример 4. Рассмотрим *дискретное топологическое пространство* S, состоящее из счетного множества точек, обозначенных 1, 2, ... Термин „дискретное" означает здесь, что каждая точка множества $S = \{1, 2, \ldots\}$ представляет собой открытое множество пространства S. Определим линейные подпространства (c_0), (c) и $(l^p) (1 \leqslant p < \infty)$ пространства $C(\{1, 2, \ldots\})$.

(c_0): Рассмотрим некоторую ограниченную последовательность $\{\xi_n\}$ вещественных или комплексных чисел. Такая последовательность определяет на дискретном пространстве $S = \{1, 2, \ldots\}$ непрерывную функцию $x(n) = \xi_n$. Назовем $x = \{\xi_n\}$ вектором с компонентами ξ_n. Совокупность всех векторов $x = \{\xi_n\}$, удовлетворяющих условию $\lim_{n \to \infty} \xi_n = 0$, образует нормированное линейное пространство (c_0) с нормой

$$\|x\| = \sup_n |x(n)| = \sup_n |\xi_n|.$$

(c): Совокупность всех векторов $x = \{\xi_n\}$, для которых существуют конечные пределы $\lim_{n \to \infty} \xi_n$, образует нормированное линейное пространство (c) с нормой $\|x\| = \sup_n |x(n)| = \sup_n |\xi_n|$.

$(l^p) (1 \leqslant p < \infty)$: Множество всех векторов $x = \{\xi_n\}$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$, образует нормированное линейное пространство (l^p) с нормой $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}$. Как абстрактное линейное пространство (l^p) является линейным подпространством пространства $C(\{1, 2, \ldots\})$. Оно является также частным случаем пространства $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$, когда $m(\{1\}) = m(\{2\}) = \ldots = 1$.

$(l^\infty) = (m)$: По аналогии с общим случаем пространства $L^\infty(S)$ обозначим через (l^∞) или (m) линейное пространство $C(\{1, 2, \ldots\})$ с нормой $\|x\| = \sup_n |x(n)| = \sup_n |\xi_n|$.

Пространство мер. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества S. Рассмотрим множество $A(S, \mathfrak{B})$ всех вещественных (или комплексных) функций $\varphi(B)$, заданных на $\mathfrak{B}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$|\varphi(B)| \neq \infty \quad \text{для всех} \quad B \in \mathfrak{B}, \tag{7}$$

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_j) \text{ для всякой последовательности } \{B_j\} \\ \text{попарно непересекающихся множеств из } \mathfrak{B}. \tag{8}$$

Вещественные функциии $\varphi(B)$, удовлетворяющие этим условиям, мы будем называть *обобщенными*[1]) мерами. Пространство $A(S, \mathfrak{B})$ мы назовем *пространством обобщенных* (соответственно *комплексных*) мер, определенных на $(S, \mathfrak{B})$.

Лемма 2. Рассмотрим некоторую вещественную функцию $\varphi \in A(S, \mathfrak{B})$. *Полная вариация* функции φ на S, определяемая формулой

$$V(\varphi;\ S) = \overline{V}(\varphi;\ S) + |\underline{V}(\varphi;\ S)|, \tag{9}$$

конечна; здесь

$$\overline{V}(\varphi;\ B) = \sup_{\substack{B_1 \subseteq B,\\ B_1 \in \mathfrak{B}}} \varphi(B_1) \quad \text{и} \quad \underline{V}(\varphi;\ B) = \inf_{\substack{B_1 \subseteq B,\\ B_1 \in \mathfrak{B}}} \varphi(B_1) \tag{10}$$

— соответственно *положительная* и *отрицательная вариации* функции φ на подмножестве $B \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Поскольку $\varphi(\emptyset) = 0$ (это следует из условий (7) и (8)), имеем $\overline{V}(\varphi;\ B) \geqslant 0 \geqslant \underline{V}(\varphi;\ B)$. Допустим, что $V(\varphi;\ S) = \infty$. Тогда существует такая убывающая последовательность $\{B_n\}$ множеств из $\mathfrak{B}$, что

$$V(\varphi;\ B_n) = \infty, \qquad |\varphi(B_n)| \geqslant n - 1.$$

Это можно доказать по индукции. Выберем $B_1 = S$ и допустим, что множества $B_2, B_3, \ldots, B_k$ определены так, что для них указанные условия выполняются. По первому из этих условий при $n = k$ существует такое множество $B \in \mathfrak{B}$, что $B \subseteq B_k$, $|\varphi(B)| \geqslant |\varphi(B_k)| + k$. Поэтому остается лишь положить $B_{k+1} = B$ для случая $V(\varphi;\ B) = \infty$ и $B_{k+1} = B_k - B$, если $V(\varphi;\ B) < \infty$. В самом деле, в последнем случае $V(\varphi;\ B_k - B) = \infty$ и $|\varphi(B_k - B)| \geqslant |\varphi(B)| - |\varphi(B_k)| \geqslant k$, что завершает доказательство по индукции. Так как последовательность $\{B_n\}$ убывает, имеем

$$S - \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} (S - B_n) =$$
$$= (S - B_1) + (B_1 - B_2) + (B_2 - B_3) + \ldots + (B_n - B_{n+1}) + \ldots,$$

[1]) Автор применяет здесь термин signed measure. Вещественные функции типа $\varphi(B)$ называют также зарядами. — *Прим. перев.*

откуда в силу счетной аддитивности функции φ

$$\varphi\left(S-\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\varphi(S-B_1)+\varphi(B_1-B_2)+\varphi(B_2-B_3)+\ldots=$$
$$=[\varphi(S)-\varphi(B_1)]+[\varphi(B_1)-\varphi(B_2)]+[\varphi(B_2)-\varphi(B_3)]+\ldots=$$
$$=\varphi(S)-\lim_{n\to\infty}\varphi(B_n)=\infty \text{ или } -\infty,$$

что противоречит условию (7).

Теорема 2 (разложение Жордана). Пусть $\varphi\in A(S, \mathfrak{B})$ — вещественная функция. Тогда положительная вариация $\overline{V}(\varphi;\ B)$, отрицательная вариация $\underline{V}(\varphi;\ B)$ и полная вариация $V(\varphi;\ B)$ счетно аддитивны на множествах $B\in\mathfrak{B}$. Кроме того, имеет место *разложение Жордана*

$$\varphi(B)=\overline{V}(\varphi;\ B)+\underline{V}(\varphi;\ B) \quad \text{для любого} \quad B\in\mathfrak{B}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\{B_n\}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{B}$. Для любого множества $B\in\mathfrak{B}$, такого, что $B\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}B_n$, справедливо неравенство $\varphi(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(B\cap B_n)\leqslant\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi;\ B_n)$, и, следовательно, $\overline{V}\left(\varphi;\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi;\ B_n)$. С другой стороны, если $C_n\in\mathfrak{B}$ — некоторое подмножество множества $B_n\ (n=1, 2, \ldots)$, то $\overline{V}\left(\varphi;\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\geqslant\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty}C_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(C_n)$, и поэтому $\overline{V}\left(\varphi;\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi;\ B_n)$. Отсюда вытекает свойство счетной аддитивности для $\overline{V}(\varphi;\ B)$; для $\underline{V}(\varphi;\ B)$ и $V(\varphi;\ B)$ оно доказывается аналогичным образом. Чтобы вывести разложение (11), заметим, что для любого множества $C\in\mathfrak{B}$, такого, что $C\subseteq B$, справедливо неравенство $\varphi(C)=\varphi(B)-\varphi(B-C)\leqslant\varphi(B)-\underline{V}(\varphi;\ B)$, откуда $\overline{V}(\varphi;\ B)\leqslant\leqslant\varphi(B)-\underline{V}(\varphi;\ B)$. Точно так же получаем, что $\underline{V}(\varphi;\ B)\geqslant\varphi(B)-\overline{V}(\varphi;\ B)$. Эти неравенства и приводят к формуле (11).

Теорема 3 (разложение Хана). Пусть $\varphi\in A(S, \mathfrak{B})$ — некоторая обобщенная мера. Тогда существует такое множество $P\in\mathfrak{B}$, что

$$\varphi(B)\geqslant 0 \quad \text{для любого} \quad B\subseteq P,\quad B\in\mathfrak{B};$$
$$\varphi(B)\leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad B\subseteq P^C=S-P,\quad B\in\mathfrak{B}.$$

Представление $S=P+(S-P)$ называется *разложением Хана* множества S относительно функции φ.

Доказательство. Для каждого положительного целого n выберем множество $B_n \in \mathfrak{B}$, такое, что $\varphi(B_n) \geqslant \overline{V}(\varphi;\ S) - 2^{-n}$. Тогда из (11) вытекает, что

$$\underline{V}(\varphi;\ B_n) \geqslant -2^{-n} \quad \text{и} \quad \overline{V}(\varphi;\ S - B_n) \leqslant 2^{-n}. \tag{12}$$

Последнее неравенство в (12) выводится из соотношений

$$\overline{V}(\varphi;\ S - B_n) = \overline{V}(\varphi;\ S) - \overline{V}(\varphi;\ B_n) \quad \text{и} \quad \overline{V}(\varphi;\ B_n) \geqslant \varphi(B_n).$$

Положим теперь [1])

$$P = \varliminf_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} B_n.$$

Тогда

$$S - P = \varlimsup_{n\to\infty} (S - B_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (S - B_n) \subseteq \bigcup_{n=k}^{\infty} (S - B_n)$$

при любом значении k. Поэтому в силу σ-аддитивности функции $\overline{V}(\varphi;\ B)$ получаем

$$\overline{V}(\varphi;\ S - P) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \overline{V}(\varphi;\ S - B_n) \leqslant 2^{-(k-1)},$$

откуда следует, что $\overline{V}(\varphi;\ S - P) = 0$. С другой стороны, отрицательная вариация $\underline{V}(\varphi;\ B)$ является неположительной мерой, и поэтому, учитывая (12) и повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем неравенство

$$|\underline{V}(\varphi;\ P)| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |\underline{V}(\varphi;\ B_n)| = 0,$$

откуда следует, что $\underline{V}(\varphi;\ P) = 0$. Это завершает доказательство теоремы.

---

[1]) *Верхним пределом* $\varlimsup_{n\to\infty} A_n$ последовательности $\{A_n\}$ множеств $A_n \subseteq S$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называется множество, содержащее те и только те точки из S, которые входят в бесконечное число множеств A_n. *Нижним пределом* $\varliminf_{n\to\infty} A_n$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам A_n, за исключением, быть может, конечного числа. Из этих определений вытекает, что $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ и $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. — *Прим. перев.*

Следствие. Полная вариация $V(\varphi;\ S)$ обобщенной меры φ определяется формулой

$$V(\varphi;\ S)=\sup_{\sup|x(s)|\leqslant 1}\left|\int_S x(s)\,\varphi(ds)\right|^{1)},\tag{13}$$

где $x(s)$ пробегает все $\mathfrak{B}$-измеримые функции, заданные на S, для которых $\sup\limits_{s\in S}|x(s)|\leqslant 1$.

Доказательство. Если мы положим $x(s)=1$ при $s\in P$ и $x(s)=-1$ при $s\in S-P$, то в правой части (13) получится $V(\varphi;\ B)$. С другой стороны, как нетрудно видеть,

$$\left|\int_S x(s)\,\varphi(ds)\right|\leqslant\sup_{s\in S}|x(s)|\cdot\int_S V(\varphi;\ ds)=\sup_{s\in S}|x(s)|\cdot V(\varphi;\ S);$$

тем самым формула (13) доказана.

Пример 5. Пространство $A(S;\ \mathfrak{B})$. Множество $A(S;\ \mathfrak{B})$ заданных на $\mathfrak{B}$ обобщенных мер φ, в котором определены операции

$$(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(B)=\alpha_1\varphi_1(B)+\alpha_2\varphi_2(B),\qquad B\in\mathfrak{B},$$

где α_1, α_2 вещественны, является вещественным линейным пространством. Линейное пространство $A(S;\ \mathfrak{B})$ с нормой, определяемой формулой

$$\|\varphi\|=V(\varphi;\ S)=\sup_{\sup|x(s)|\leqslant 1}\left|\int_S x(s)\,\varphi(ds)\right|,\tag{14}$$

является нормированным линейным пространством.

Пример 6. Множество $A(S;\ \mathfrak{B})$ комплексных мер φ с операциями

$$(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(B)=\alpha_1\varphi_1(B)+\alpha_2\varphi_2(B),\qquad B\in\mathfrak{B},$$

где α_1, α_2 — комплексные числа, является комплексным линейным пространством. Оно становится нормированным линейным пространством, если ввести норму

$$\|\varphi\|=\sup_{\sup|x(s)|\leqslant 1}\left|\int_S x(s)\,\varphi(ds)\right|,\tag{15}$$

где верхняя грань берется по всем комплексным $\mathfrak{B}$-измеримым функциям, заданным на S, для которых $\sup\limits_{s\in S}|x(s)|\leqslant 1$. Правую часть формулы (15) мы будем называть *полной вариацией* функции φ на S и обозначать $V(\varphi;\ S)$.

---

[1]) В § 3 введения был определен m-интеграл $\int\limits_B x(s)\,m(ds)$ для неотрицательных мер m: для обобщенных и комплексных мер φ интеграл $\int\limits_B x(s)\,\varphi(ds)$ строится совершенно аналогично. — *Прим. перев.*