4. Примеры квазинормированных линейных пространств

Пример 1. Пространство $\mathfrak{C}^k(\Omega)$. Определенное в § 1 гл. I линейное пространство $\mathfrak{C}^k(\Omega)$ станет квазинормированным, если за квазинорму принять $\|x\| = d(x, 0)$, где $d(x, y)$ — определенная ранее функция расстояния.

Пример 2. Пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$. Пусть $m(S) < \infty$ и $M(S, \mathfrak{B}, m)$ — множество всех комплексных $\mathfrak{B}$-измеримых функций $x(s)$, определенных на множестве S и таких, что $|x(s)| < \infty$ m-п. в. Множество $M(S, \mathfrak{B}, m)$ с алгебраическими операциями

$$(x+y)(s) = x(s) + y(s), \qquad (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$$

и квазинормой

$$\|x\| = \int_S |x(s)|(1 + |x(s)|)^{-1}\, m(ds) \tag{1}$$

(при условии, что $x = y$ тогда и только тогда, когда m-п. в. $x(s) = y(s)$) образует квазинормированное линейное пространство. Неравенство треугольника для квазинормы $\|x\|$ следует из соотношений

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leqslant \frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|} \leqslant \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}.$$

Как показывает следующее утверждение, при такой квазинорме отображение $\{\alpha, x\} \to \alpha x$ непрерывно.

Предложение. Сходимость $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ в пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$ эквивалентна *асимптотической сходимости* (или *сходимости по мере*) в S последовательности функций $\{x_n(s)\}$ к $x(s)$, т. е. сходимости

$$\lim_{n\to\infty} m\{s \in S;\ |x(s) - x_n(s)| \geqslant \varepsilon\} = 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Доказательство. Соотношение (2) следует из неравенства

$$\frac{\delta}{1+\delta}\, m(B_\delta) \leqslant \|x\| \leqslant m(B_\delta) + \frac{\delta}{1+\delta}\, m(S - B_\delta),$$

где

$$B_\delta = \{s \in S;\ |x(s)| \geqslant \delta\} \quad (\delta > 0).$$

Замечание. Нетрудно видеть, что эквивалентная топология в пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$ может быть введена и с помощью квазинормы

$$\|x\| = \inf_{\varepsilon > 0} \operatorname{arc\,tg}\,[\varepsilon + m\{s \in S;\ |x(s)| \geqslant \varepsilon\}]. \tag{1'}$$

Пример 3. Пространство $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. В линейном пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ (гл. I, § 1) можно ввести квазинорму, полагая $\|x\| = d(x, 0)$, где $d(x, y)$ — функция расстояния [1]), определенная в гл. I, § 1.

5. Предгильбертовы пространства

Определение 1. Вещественное или комплексное нормированное линейное пространство X называется *предгильбертовым*, если его норма удовлетворяет условию

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

Теорема 1 (Фреше, фон Нейман, Йордан). В вещественном предгильбертовом пространстве X определим функцию двух переменных

$$(x, y) = 4^{-1}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \tag{2}$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\alpha \in R^1), \tag{3}$$

$$(x+y, z) = (x, z) + (y, z), \tag{4}$$

$$(x, y) = (y, x), \tag{5}$$

$$(x, x) = \|x\|^2. \tag{6}$$

Доказательство. Соотношения (5) и (6) очевидны. Из (1) и (2) мы выводим, что

$$(x, z) + (y, z) = 4^{-1}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) = 2^{-1}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \tag{7}$$

Взяв $y=0$, мы получим $(x, z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)$, так как $(0, z) = 0$ согласно (2). Отсюда при помощи соотношения (7) мы получаем свойство (4). Кроме того, из предыдущего ясно, что свойство (3) выполняется для рациональных α вида $\alpha = m/2^n$. В нормированном линейном пространстве функции $\|\alpha x + y\|$ и $\|\alpha x - y\|$ непрерывны по α. Следовательно, и функция $(\alpha x, y)$, согласно (2), непрерывна по α. Тем самым свойство (3) доказано для всех вещественных значений α.

Следствие (фон Нейман, Йордан). Определим в комплексном нормированном линейном предгильбертовом пространстве X функцию

$$(x, y) = (x, y)_1 + i(x, iy)_1,$$

---

[1]) Имеется в виду метрика типа той, что использовалась в доказательстве предложения 6. — *Прим. перев.*