Пример 3. Пространство $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. В линейном пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ (гл. I, § 1) можно ввести квазинорму, полагая $\|x\| = d(x, 0)$, где $d(x, y)$ — функция расстояния [1]), определенная в гл. I, § 1.

5. Предгильбертовы пространства

Определение 1. Вещественное или комплексное нормированное линейное пространство X называется *предгильбертовым*, если его норма удовлетворяет условию

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

Теорема 1 (Фреше, фон Нейман, Йордан). В вещественном предгильбертовом пространстве X определим функцию двух переменных

$$(x, y) = 4^{-1}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \tag{2}$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\alpha \in R^1), \tag{3}$$

$$(x+y, z) = (x, z) + (y, z), \tag{4}$$

$$(x, y) = (y, x), \tag{5}$$

$$(x, x) = \|x\|^2. \tag{6}$$

Доказательство. Соотношения (5) и (6) очевидны. Из (1) и (2) мы выводим, что

$$(x, z) + (y, z) = 4^{-1}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) = 2^{-1}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \tag{7}$$

Взяв $y = 0$, мы получим $(x, z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)$, так как $(0, z) = 0$ согласно (2). Отсюда при помощи соотношения (7) мы получаем свойство (4). Кроме того, из предыдущего ясно, что свойство (3) выполняется для рациональных α вида $\alpha = m/2^n$. В нормированном линейном пространстве функции $\|\alpha x + y\|$ и $\|\alpha x - y\|$ непрерывны по α. Следовательно, и функция $(\alpha x, y)$, согласно (2), непрерывна по α. Тем самым свойство (3) доказано для всех вещественных значений α.

Следствие (фон Нейман, Йордан). Определим в комплексном нормированном линейном предгильбертовом пространстве X функцию

$$(x, y) = (x, y)_1 + i(x, iy)_1,$$

---

[1]) Имеется в виду метрика типа той, что использовалась в доказательстве предложения 6. — *Прим. перев.*

где

$$i=\sqrt{-1}, \quad (x, y)_1 \equiv 4^{-1}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right). \tag{8}$$

Для этой функции выполняются условия (4), (6) и, кроме того,

$$(\alpha x, y)=\alpha(x, y) \quad (\alpha \in C^1), \tag{3'}$$

$$(x, y)=\overline{(y, x)} \tag{5'}$$

(черта означает комплексно сопряженное число).

Доказательство. Пространство X является вещественным предгильбертовым пространством, поэтому соотношения (4) и (3′) выполняются при вещественных α. Из (8) мы получаем, что $(y, x)_1=(x, y)_1$, $(ix, iy)_1=(x, y)_1$, откуда $(y, ix)_1=(-iiy, ix)_1=-(iy, x)_1= -(x, iy)_1$. Итак,

$$(y, x)=(y, x)_1+i(y, ix)_1=(x, y)_1-i(x, iy)_1=\overline{(x, y)}.$$

Точно так же мы получаем

$$(ix, y)=(ix, y)_1+i(ix, iy)_1=-(x, iy)_1+i(x, y)_1=i(x, y),$$

и, следовательно, свойство (3′) доказано. Наконец, утверждение (6) справедливо потому, что

$$(x, x)_1=\|x\|^2 \text{ и } (x, ix)_1=4^{-1}\left(|1+i|^2-|1-i|^2\right)\|x\|^2=0.$$

Теорема 2. Если в вещественном (или комплексном) линейном пространстве X каждой паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие некоторое вещественное (соответственно комплексное) число (x, y), причем функция (x, y) удовлетворяет условиям (3′), (4), (5′) и дополнительному требованию

$$(x, x) \geqslant 0; \ (x, x)=0 \text{ тогда и только тогда, когда } x=0, \tag{9}$$

то X представляет собой вещественное (соответственно комплексное)[1]) предгильбертово пространство.

Доказательство. Для всякого вещественного числа α мы из (3′), (4) и (5′) выводим соотношение

$$(x+\alpha(x, y)y, x+\alpha(x, y)y)=\|x\|^2+2\alpha|(x, y)|^2+$$
$$+\alpha^2|(x, y)|^2\|y\|^2 \geqslant 0, \qquad \text{где } \|x\|=+(x, x)^{1/2};$$

таким образом, $|(x, y)|^4-\|x\|^2 \cdot |(x, y)|^2 \cdot \|y\|^2 \leqslant 0$. Отсюда мы получаем *неравенство Шварца*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \tag{10}$$

---

[1]) Имеется в виду пространство X с нормой, определяемой формулой (6): $\|x\|^2=(x, x)$. — *Прим. перев.*

в котором знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда x и y линейно зависимы (это следует из второй части условия (9)).

Из (10) для нормы $\|x\|$ выводится неравенство треугольника

$$\|x+y\|^2=(x+y,\ x+y)=$$
$$=\|x\|^2+(x,\ y)+(y,\ x)+\|y\|^2 \leqslant (\|x\|+\|y\|)^2.$$

Наконец, соотношение (1) легко проверяется, и это завершает доказательство теоремы.

Определение 2. Число $(x,\ y)$, определенное выше, называется *скалярным* (или *внутренним*) *произведением* двух векторов x и y предгильбертова пространства X.

Пример 1. Пространство $L^2(S,\ \mathfrak{B},\ m)$ является предгильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x,\ y)=\int_S x(s)\overline{y(s)}\,m(ds).$$

Пример 2. Нормированное линейное пространство (l^2) является предгильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\{\xi_n\},\ \{\eta_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\bar{\eta}_n.$$

Пример 3. Пусть Ω — открытая область пространства R^n и k — произвольное неотрицательное целое число, $0\leqslant k<\infty$. Совокупность функций $f\in C^k(\Omega)$, для которых

$$\|f\|_k\equiv\left(\sum_{|j|\leqslant k}\int_\Omega |D^j f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}<\infty, \tag{11}$$

где $dx=dx_1\,dx_2\ldots dx_n$ — мера Лебега в R^n, образует предгильбертово пространство $\hat{H}^k(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f,\ g)_k=\sum_{|j|\leqslant k}\int_\Omega D^j f(x)\cdot D^j\overline{g(x)}\,dx. \tag{12}$$

Пример 4. Рассмотрим пространство $C_0^k(\Omega)$, где $0\leqslant k<\infty$, а Ω — открытая область в R^n. Если ввести в этом пространстве скалярное произведение (12) и норму (11), то получится предгильбертово пространство, которое мы обозначим $\hat{H}_0^k(\Omega)$.

Пример 5. Пусть G — открытая ограниченная область комплексной z-плоскости. Через $A^2(G)$ обозначим множество всех голоморфных функций $f(z)$, определенных в области G, таких, что

$$\|f\|\equiv\left(\int_G\int |f(z)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}<\infty \quad (z=x+iy). \tag{13}$$

Множество $A^2(G)$ с нормой (13), алгебраическими операциями

$$(f+g)(z)=f(z)+g(z), \qquad (\alpha f)(z)=\alpha f(z) \quad (\alpha \in C^1)$$

и скалярным произведением

$$(f, g)=\int_G\int f(z)\overline{g(z)}\,dx\,dy \tag{14}$$

представляет собой предгильбертово пространство.

Пример 6. Класс H-L^2 Харди — Лебега. Обозначим через H-L^2 совокупность всех функций $f(z)$, голоморфных внутри единичного круга $\{z;\ |z|<1\}$ комплексной z-плоскости, таких, что

$$\sup_{0<r<1}\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)<\infty. \tag{15}$$

Тогда если $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ — разложение $f(z)$ в ряд Тейлора, то функция

$$F(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{n,m=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}c_n\bar{c}_mr^{n+m}e^{i(n-m)\theta}\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}$$

монотонно возрастает по r в области $0<r<1$ и ограничена сверху. Поэтому, как нетрудно проверить, величина

$$\|f\|=\sup_{0<r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)\right]^{1/2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2} \tag{16}$$

представляет собой норму, для которой выполняется условие (1), так как пространство (l^2) предгильбертово.

Замечание. Зададим произвольную последовательность $\{c_n\}\in(l^2)$ и рассмотрим функцию

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^ne^{in\theta}, \qquad |z|<1.$$

Согласно неравенству Шварца,

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}c_nz^n\right|\leqslant\left(\sum_{n=k}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=k}^{\infty}r^{2n}\right)^{1/2},$$

поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ равномерно сходится во всяком круге $|z|\leqslant\rho$, где $0<\rho<1$. Следовательно, функция $f(z)$ голоморфна в единичном круге $|z|<1$, и при этом для нее выполняется условие (15), т. е. $f(z)$ принадлежит классу $H\text{-}L^2$. Тем самым доказана следующая

Теорема 3. Соотношение

$$H\text{-}L^2 \ni f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \leftrightarrow \{c_n\} \in (l^2)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями класса Харди — Лебега $H\text{-}L^2$ и элементами предгильбертова пространства (l^2). При этом

$$\text{если } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \leftrightarrow \{c_n\}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \leftrightarrow \{d_n\},$$

$$\text{то } f(z) + g(z) \leftrightarrow \{c_n + d_n\}, \quad \alpha f(z) \leftrightarrow \{\alpha c_n\} \text{ и } \|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\right)^{1/2}.$$

Таким образом, $H\text{-}L^2$ как предгильбертово пространство изоморфно (l^2).

6. Непрерывность линейных операторов

Предложение 1. Пусть X и Y — линейные топологические пространства над одним и тем же полем K. Для того чтобы линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, был непрерывным всюду в $D(T)$, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор был непрерывным в точке $x = 0$ ($x = 0$ — нулевой вектор).

Доказательство. Это утверждение следует из линейности оператора T и равенства $T \cdot 0 = 0$.

Теорема 1. Пусть X, Y — локально выпуклые пространства, а $\{p\}$, $\{q\}$ — системы полунорм, определяющие топологию соответственно в X и Y. Тогда линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y, непрерывен в том и только в том случае, когда для каждой полунормы $q \in \{q\}$ существуют полунорма $p \in \{p\}$ и положительное число β, такие, что

$$q(Tx) \leqslant \beta p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{1}$$

Доказательство. Условие (1) является достаточным, так как $T \cdot 0 = 0$, и поэтому из (1) вытекает непрерывность оператора T в точке $x = 0 \in D(T)$, а это означает, что оператор T непрерывен всюду на $D(T)$.

Докажем необходимость этого условия. Если оператор T непрерывен в точке $x = 0$, то для всякой полунормы $q \in \{q\}$ и любого положительного числа ε найдутся полунорма $p \in \{p\}$ и положительное число δ, такие, что из соотношений $x \in D(T)$ и $p(x) \leqslant \delta$ следует неравенство $q(Tx) \leqslant \varepsilon$. Пусть x — произвольная точка из $D(T)$.