т. е. $f(z)$ принадлежит классу $H\text{-}L^2$. Тем самым доказана следующая

Теорема 3. Соотношение

$$H\text{-}L^2 \ni f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \leftrightarrow \{c_n\} \in (l^2)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями класса Харди — Лебега $H\text{-}L^2$ и элементами предгильбертова пространства (l^2). При этом

$$\text{если } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \leftrightarrow \{c_n\}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \leftrightarrow \{d_n\},$$

$$\text{то } f(z) + g(z) \leftrightarrow \{c_n + d_n\}, \quad \alpha f(z) \leftrightarrow \{\alpha c_n\} \text{ и } \|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\right)^{1/2}.$$

Таким образом, $H\text{-}L^2$ как предгильбертово пространство изоморфно (l^2).

6. Непрерывность линейных операторов

Предложение 1. Пусть X и Y — линейные топологические пространства над одним и тем же полем K. Для того чтобы линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, был непрерывным всюду в $D(T)$, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор был непрерывным в точке $x = 0$ ($x = 0$ — нулевой вектор).

Доказательство. Это утверждение следует из линейности оператора T и равенства $T \cdot 0 = 0$.

Теорема 1. Пусть X, Y — локально выпуклые пространства, а $\{p\}$, $\{q\}$ — системы полунорм, определяющие топологию соответственно в X и Y. Тогда линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y, непрерывен в том и только в том случае, когда для каждой полунормы $q \in \{q\}$ существуют полунорма $p \in \{p\}$ и положительное число β, такие, что

$$q(Tx) \leqslant \beta p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{1}$$

Доказательство. Условие (1) является достаточным, так как $T \cdot 0 = 0$, и поэтому из (1) вытекает непрерывность оператора T в точке $x = 0 \in D(T)$, а это означает, что оператор T непрерывен всюду на $D(T)$.

Докажем необходимость этого условия. Если оператор T непрерывен в точке $x = 0$, то для всякой полунормы $q \in \{q\}$ и любого положительного числа ε найдутся полунорма $p \in \{p\}$ и положительное число δ, такие, что из соотношений $x \in D(T)$ и $p(x) \leqslant \delta$ следует неравенство $q(Tx) \leqslant \varepsilon$. Пусть x — произвольная точка из $D(T)$.

Выберем такое положительное число λ, что $\lambda p(x) \leqslant \delta$. Тогда $p(\lambda x) \leqslant \delta$, $\lambda x \in D(T)$, и поэтому $q(T(\lambda x)) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $q(Tx) \leqslant \varepsilon/\lambda$. Итак, если $p(x)=0$, то можно выбрать λ сколь угодно большим, и тогда $q(Tx)=0$; если же $p(x) \neq 0$, то мы возьмем $\lambda = \delta/p(x)$; таким образом, в любом случае $q(Tx) \leqslant \beta p(x)$, где $\beta = \varepsilon/\delta$.

Следствие 1. Пусть X — локально выпуклое пространство, а f — некоторый линейный функционал на $D(f) \subseteq X$. Функционал f непрерывен тогда и только тогда, когда существуют полунорма p из системы $\{p\}$, определяющей топологию в X, и положительное число β, такие, что

$$|f(x)| \leqslant \beta p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in D(f). \tag{2}$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из того, что абсолютная величина $|\alpha|$ образует систему полунорм, определяющих обычную топологию поля вещественных или комплексных чисел α.

Следствие 2. Пусть X, Y — нормированные линейные пространства. Линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y, непрерывен тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная β, что

$$\|Tx\| \leqslant \beta \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{3}$$

Следствие 3. Рассмотрим два нормированных линейных пространства X и Y. Линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y, имеет непрерывный обратный оператор T^{-1} тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная γ, что

$$\|Tx\| \geqslant \gamma \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{4}$$

Доказательство. При выполнении условия (4) из соотношения $Tx=0$ следует, что $x=0$, и поэтому обратный оператор T^{-1} существует. Его непрерывность вытекает из предыдущего следствия 2 и неравенства (4)[1]).

Определение 1. Пусть T — непрерывный линейный оператор, отображающий нормированное линейное пространство X в нормированное линейное пространство Y. Определим величину

$$\|T\| \equiv \inf_{\beta \in B} \beta, \quad \text{где} \quad B = \{\beta;\ \|Tx\| \leqslant \beta \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in X\}. \tag{5}$$

Из линейности отображения T и следствия 2 вытекает, что

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \tag{6}$$

---

[1]) Необходимость условия (4) здесь совершенно очевидна — она следует из условия непрерывности обратного оператора T^{-1}. — *Прим. перев.*

Величина $\|T\|$ называется ***нормой*** оператора T. Непрерывный линейный оператор, отображающий нормированное линейное пространство X в нормированное линейное пространство Y, называется также *ограниченным линейным оператором*, действующим из X в Y, так как для такого оператора T норма $\|Tx\|$ ограничена на ***единичном шаре*** $\{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ пространства X.

Определение 2. Пусть T и S — линейные операторы, причем

$$D(T) \subseteq X, \quad D(S) \subseteq X \quad \text{и} \quad R(T) \subseteq Y, \quad R(S) \subseteq Y.$$

Определим для операторов операции сложения и умножения на скаляр:

$$(T+S)(x) = Tx + Sx \quad \text{для} \quad x \in D(T) \cap D(S), \qquad (\alpha T)(x) = \alpha(Tx).$$

Пусть T — линейный оператор из $D(T) \subseteq X$ в Y, а S — линейный оператор из $D(S) \subseteq Y$ в Z. Тогда *произведение* ST операторов T, S определяется формулой

$$(ST)x = S(Tx) \quad \text{для} \quad x \in \{x;\ x \in D(T) \quad \text{и} \quad Tx \in D(S)\};$$

$T+S$, αT и ST являются, очевидно, линейными операторами.

Замечание. Произведения ST и TS не обязательно совпадают даже в том случае, когда $X = Y = Z$. В качестве примера рассмотрим линейные операторы $Tx = tx(t)$ и $Sx(t) = \sqrt{-1}\,\frac{d}{dt}x(t)$, действующие из $L^2(R^1)$ в $L^2(R^1)$. В этом примере мы получаем ***перестановочное соотношение*** $(ST - TS)\,x(t) = \sqrt{-1}\,x(t)$.

Предложение 2. Если T и S — ограниченные линейные операторы, отображающие нормированное линейное пространство X в нормированное линейное пространство Y, то

$$\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|, \quad \|\alpha T\| = |\alpha| \cdot \|T\|. \tag{7}$$

Если T — ограниченный линейный оператор, действующий из нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y, а S — ограниченный линейный оператор, действующий из Y в нормированное линейное пространство Z, то

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|. \tag{8}$$

Доказательство. Мы докажем лишь последнее неравенство; соотношения (7) доказываются аналогично. Имеем $\|STx\| \leqslant \|S\| \cdot \|Tx\| \leqslant \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$; таким образом, $\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$.

Следствие. Пусть T — ограниченный линейный оператор, отображающий нормированное линейное пространство X в X. Тогда

$$\|T^n\| \leqslant \|T\|^n, \tag{9}$$

где T^n определяется по индукции формулой $T^n = TT^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $T^0 = I$ — ***тождественный оператор***, отображающий каждый элемент x в себя, т. е. $Ix = x$.