7. Ограниченные множества и борнологические пространства

Определение 1. Подмножество B линейного топологического пространства X называется *ограниченным*, если оно *поглощается* каждой окрестностью U элемента $x=0$, т. е. если для каждого U найдется такая положительная константа α, что $\alpha^{-1}B \subseteq U$. Символ $\alpha^{-1}B$ обозначает здесь множество $\alpha^{-1}B=\{x \in X;\ x=\alpha^{-1}b,\ b \in B\}$.

Предложение. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Тогда непрерывный линейный оператор, отображающий X в Y, переводит всякое ограниченное множество пространства X в ограниченное множество пространства Y.

Доказательство. Обозначим через B произвольное ограниченное множество пространства X; пусть V — некоторая окрестность точки $y=0$ пространства Y. В силу непрерывности оператора T существует такая окрестность U точки $x=0$ пространства X, что $TU = \{Tu;\ u \in U\} \subseteq V$. Выберем теперь такое $\alpha>0$, что $B \subseteq \alpha U$. Тогда $TB \subseteq T(\alpha U)=\alpha(TU) \subseteq \alpha V$. Это показывает, что TB — ограниченное множество пространства Y.

Определение 2. Локально выпуклое пространство X называется *борнологическим*, когда выполняется следующее условие:

> если уравновешенное выпуклое множество M пространства X поглощает всякое ограниченное множество из X, то M является окрестностью нуля пространства X. (1)

Теорема 1. Локально выпуклое пространство X является борнологическим тогда и только тогда, когда всякая полунорма на X, ограниченная на каждом ограниченном множестве, непрерывна.

Доказательство. Заметим сначала, что полунорма $p(x)$ пространства X непрерывна тогда и только тогда, когда она непрерывна при $x=0$. Это следует из свойства полуаддитивности: $p(x-y) \geqslant |p(x)-p(y)|$ (гл. I, § 1 (4)).

Необходимость. Пусть полунорма $p(x)$ пространства X ограничена на всяком ограниченном множестве из X. Множество $M = \{x \in X;\ p(x) \leqslant 1\}$ выпукло и уравновешенно. Если B — некоторое ограниченное множество из X, то $\sup\limits_{b \in B} p(b)=\alpha<\infty$, и поэтому $B \subseteq \alpha M$. По предположению пространство X — борнологическое, следовательно, множество M является окрестностью нуля. Отсюда видно, что полунорма $p(x)$ непрерывна при $x=0$.

Достаточность. Пусть M — выпуклое уравновешенное множество из X, которое поглощает всякое ограниченное множество пространства X. Пусть p — функционал Минковского множества M.

Тогда функционал p ограничен на каждом ограниченном множестве, поскольку множество M по предположению поглощает каждое ограниченное множество. Следовательно, функционал $p(x)$ при сделанных предположениях непрерывен. Поэтому $M_1 = \{x \in X;\ p(x) < 1/2\}$ — открытое множество, принадлежащее множеству M и содержащее точку $x = 0$. Отсюда следует, что M — окрестность нуля.

Пример 1. Всякое нормированное линейное пространство является борнологическим.

Доказательство. Пусть X — нормированное линейное пространство. Тогда единичный шар $S = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ является ограниченным множеством в X. Пусть некоторая полунорма $p(x)$, заданная на X, ограничена на S, т. е. $\sup\limits_{x \in S} p(x) = \alpha < \infty$. Тогда для любого $y \neq 0$ имеем

$$p(y) = p\left(\|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\| \cdot p\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \leqslant \alpha \|y\|.$$

Таким образом, полунорма p непрерывна при $y = 0$ и, следовательно, непрерывна в любой точке $x \in X$.

Замечание. Как будет показано далее, квазинормированное линейное пространство $M(S;\ \mathfrak{B})$ не является локально выпуклым. Поэтому квазинормированное пространство не обязательно должно быть борнологическим. Тем не менее справедлива следующая

Теорема 2. Линейный оператор T, действующий из одного квазинормированного линейного пространства в другое такое пространство, непрерывен тогда и только тогда, когда T переводит ограниченные множества в ограниченные.

Доказательство. Как было показано в гл. I, § 2 (предложение 2), квазинормированное пространство является линейным топологическим пространством. Поэтому необходимость сформулированного условия следует из предыдущего предложения; остается доказать достаточность.

Пусть T отображает ограниченные множества в ограниченные. Предположим, что $s\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0$. Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} \|x_k\| = 0$, и поэтому существует такая последовательность целых чисел $\{n_k\}$, что

$$\lim_{k \to \infty} n_k = \infty, \text{ в то время как } \lim_{k \to \infty} n_k \|x_k\| = 0.$$

Мы можем, например, выбрать n_k следующим образом:

n_k равно наибольшему целому числу, не превосходящему $\|x_k\|^{-1/2}$, если $x_k \neq 0$; $\quad n_k = k$, если $x_k = 0$.

Теперь мы имеем $\|n_k x_k\| = \|x_k + x_k + \ldots + x_k\| \leqslant n_k \|x_k\|$, откуда $s\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} n_k x_k = 0$. Но в квазинормированном пространстве последовательность $\{n_k x_k\}$, сходящаяся к $x = 0$, является ограниченной. Отсюда в силу сделанных предположений $\{T(n_k x_k)\} = \{n_k T x_k\}$ — тоже ограниченная последовательность. Поэтому

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} Tx_k = s\text{-}\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\left(T\left(n_k x_k\right)\right) = 0,$$

и, таким образом, оператор T непрерывен при $x=0$, а следовательно, непрерывен всюду.

Теорема 3. Пусть X — некоторое борнологическое пространство. Если линейный оператор T, действующий из X в локально выпуклое линейное топологическое пространство Y, отображает всякое ограниченное множество в ограниченное, то он непрерывен.

Доказательство. Обозначим через V некоторую выпуклую уравновешенную окрестность нуля пространства Y. Пусть p — функционал Минковского множества V. Рассмотрим функцию $q(x) = p(Tx)$; она является полунормой в X, ограниченной на всяком ограниченном множестве из X, поскольку всякое ограниченное множество из Y поглощается указанной окрестностью V. Так как пространство X — борнологическое, полунорма q непрерывна. Поэтому множество $\{x \in X;\ Tx \in V^a\} = \{x \in X;\ q(x) \leqslant 1\}$ является окрестностью нуля пространства X. Таким образом, непрерывность оператора T доказана.

8. Обобщенные функции и обобщенные производные

Непрерывный линейный функционал, заданный на локально выпуклом линейном топологическом пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$, введенном в § 1 гл. I, представляет собой „распределение“ или „обобщенную функцию“ Л. Шварца. Для исследования обобщенных функций нам потребуется такая теорема.

Теорема 1. Пусть B — некоторое ограниченное множество в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Тогда в Ω существует такое бикомпактное подмножество K, что

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \text{ для всех } \varphi \in B, \tag{1}$$

$$\sup_{x\in K,\,\varphi\in B} |D^j\varphi(x)| < \infty \text{ для всякого дифференциального оператора } D^j. \tag{2}$$

Доказательство. Допустим, что существуют последовательность функций $\{\varphi_i\} \subseteq B$ и последовательность точек $\{p_i\}$, такие, что: (1°) последовательность $\{p_i\}$ не имеет в Ω предельных точек; (2°) $\varphi_i(p_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,|\varphi(p_i)|/|\varphi_i(p_i)|$$

представляет собой непрерывную полунорму на всяком пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ (гл. I, § 1). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega);\ p(\varphi) \leqslant \varepsilon\}$ является окрестностью нуля пространства