ной. Отсюда в силу сделанных предположений $\{T(n_k x_k)\} = \{n_k T x_k\}$ — тоже ограниченная последовательность. Поэтому

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} Tx_k = s\text{-}\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\left(T\left(n_k x_k\right)\right) = 0,$$

и, таким образом, оператор T непрерывен при $x=0$, а следовательно, непрерывен всюду.

Теорема 3. Пусть X — некоторое борнологическое пространство. Если линейный оператор T, действующий из X в локально выпуклое линейное топологическое пространство Y, отображает всякое ограниченное множество в ограниченное, то он непрерывен.

Доказательство. Обозначим через V некоторую выпуклую уравновешенную окрестность нуля пространства Y. Пусть p — функционал Минковского множества V. Рассмотрим функцию $q(x) = p(Tx)$; она является полунормой в X, ограниченной на всяком ограниченном множестве из X, поскольку всякое ограниченное множество из Y поглощается указанной окрестностью V. Так как пространство X — борнологическое, полунорма q непрерывна. Поэтому множество $\{x \in X;\ Tx \in V^a\} = \{x \in X;\ q(x) \leqslant 1\}$ является окрестностью нуля пространства X. Таким образом, непрерывность оператора T доказана.

8. Обобщенные функции и обобщенные производные

Непрерывный линейный функционал, заданный на локально выпуклом линейном топологическом пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$, введенном в § 1 гл. I, представляет собой „распределение“ или „обобщенную функцию“ Л. Шварца. Для исследования обобщенных функций нам потребуется такая теорема.

Теорема 1. Пусть B — некоторое ограниченное множество в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Тогда в Ω существует такое бикомпактное подмножество K, что

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \text{ для всех } \varphi \in B, \tag{1}$$

$$\sup_{x\in K,\, \varphi\in B} |D^j\varphi(x)| < \infty \text{ для всякого дифференциального оператора } D^j. \tag{2}$$

Доказательство. Допустим, что существуют последовательность функций $\{\varphi_i\} \subseteq B$ и последовательность точек $\{p_i\}$, такие, что: (1°) последовательность $\{p_i\}$ не имеет в Ω предельных точек; (2°) $\varphi_i(p_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} i|\varphi(p_i)|/|\varphi_i(p_i)|$$

представляет собой непрерывную полунорму на всяком пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ (гл. I, § 1). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega);\ p(\varphi) \leqslant \varepsilon\}$ является окрестностью нуля пространства

$\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Так как $\mathfrak{D}(\Omega)$ — индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, то множество $\{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega);\ p(\varphi) \leqslant \varepsilon\}$ является окрестностью нуля в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Поэтому функция p непрерывна в точке 0 этого пространства, а следовательно, и всюду в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Таким образом, полунорма p ограничена на ограниченном множестве B, принадлежащем $\mathfrak{D}(\Omega)$. В то же время $p(\varphi_i) \geqslant i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Это доказывает справедливость утверждения (1).

Допустим теперь, что (1) имеет место, а (2) не выполняется. Тогда существуют дифференциальный оператор D^{j_0} и последовательность функций $\{\varphi_i\} \subseteq B$, такие, что $\sup\limits_{x \in K} |D^{j_0}\varphi_i(x)| > i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Поэтому если мы положим

$$p(\varphi) = \sup_{x \in K} |D^{j_0}\varphi(x)| \qquad \text{для} \qquad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega),$$

то $p(\varphi)$ будет непрерывной полунормой пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ и $p(\varphi_i) > i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, последовательность $\{\varphi_i\} \subseteq B$ не может быть ограниченной в $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ и тем более в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Полученное противоречие показывает, что условие (2) тоже выполняется.

Теорема 2. Пространство $\mathfrak{D}(\Omega)$ является борнологическим.

Доказательство. Пусть $q(\varphi)$ — некоторая полунорма пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$, ограниченная на каждом ограниченном множестве из $\mathfrak{D}(\Omega)$. В силу теоремы 1 из § 7 гл. I нам нужно лишь доказать, что полунорма q непрерывна в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Для этого покажем, что q непрерывна на пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, где K — любое бикомпактное подмножество из Ω. Поскольку $\mathfrak{D}(\Omega)$ — индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, мы сможем заключить отсюда, что q непрерывна на $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Но полунорма q действительно непрерывна на любом пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. В самом деле, при сделанных предположениях она ограничена на всяком ограниченном множестве квазинормированного линейного пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ и, следовательно, по теореме 2 предыдущего параграфа непрерывна на $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Таким образом, полунорма q непрерывна и на $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Теперь мы можем дать определение *обобщенной функции.*

Определение 1. Линейный функционал T, заданный и непрерывный на пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$, называется *обобщенной функцией*, или *распределением*, в области Ω. Величина $T(\varphi)$ называется значением обобщенной функции T на *основной функции* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

Из теоремы 1 § 7 гл. I и предыдущей теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Для того чтобы линейный функционал T, заданный на $\mathfrak{D}(\Omega)$, был обобщенной функцией в Ω, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен на любом ограниченном множестве из $\mathfrak{D}(\Omega)$, т. е. на всяком множестве $B \in \mathfrak{D}(\Omega)$, удовлетворяющем условиям (1) и (2).

Доказательство. Это следует из того, что функционал $T(\varphi)$ непрерывен тогда и только тогда, когда непрерывна полунорма $|T(\varphi)|$.

Следствие. *Линейный функционал T, заданный в пространстве $C_0^\infty(\Omega)$, представляет собой обобщенную функцию в области Ω тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

> каждому бикомпактному подмножеству K из Ω соответствуют положительная постоянная C и положительное целое k, такие, что $|T(\varphi)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j \varphi(x)|$ для всех $\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega)$. (3)

Доказательство. Функционал T, непрерывный на индуктивном пределе $\mathfrak{D}(\Omega)$ пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, должен быть непрерывным на каждом пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Отсюда вытекает необходимость условия (3). Достаточность этого условия очевидна, так как из него следует, что функционал T ограничен на всяком ограниченном множестве, принадлежащем $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Замечание. Приведенное выше следствие весьма полезно для приложений, так как его можно принять за удобное определение обобщенной функции.

Пример 1. Пусть комплексная функция $f(x)$, заданная почти всюду в области Ω, является *локально интегрируемой* в Ω по отношению к мере Лебега $dx = dx_1 \ldots dx_n$ в R^n, т. е. для любого бикомпактного подмножества K из Ω имеем $\int\limits_K |f(x)|\,dx < \infty$. Тогда формула

$$T_f(\varphi) = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \tag{4}$$

определяет в Ω обобщенную функцию T_f[1]).

Пример 2. Пусть $m(B)$ есть σ-конечная σ-аддитивная комплексная мера, заданная на бэровских подмножествах B открытого множества Ω пространства R^n. Тогда формула

$$T_m(\varphi) = \int\limits_\Omega \varphi(x)\,m(dx), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \tag{5}$$

определяет в Ω обобщенную функцию T_m.

---

[1]) Обобщенные функции вида T_f, соответствующие локально интегрируемым функциям f, в математической литературе на русском языке называются *регулярными.* В дальнейшем автор часто отождествляет регулярную обобщенную функцию T_f и функцию f (смысл и правомерность такого отождествления выясняются в замечании к определению 2 и в ходе дальнейшего изложения) и пишет $T = f$, имея в виду, что $T = T_f$. — *Прим. перев.*

Пример 3. В примере 2 можно, в частности, положить

$$T_{\delta_p}(\varphi) = \varphi(p), \quad \text{где } p \text{ — произвольная фиксированная точка из } \Omega, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega). \tag{6}$$

Формула (6) определяет в Ω обобщенную функцию T_{δ_p}, которая называется *δ-функцией Дирака*, сосредоточенной в точке $p \in \Omega$. В частном случае, когда $p = 0$ (начало координат в R^n), мы будем обозначать T_{δ_0} через T_δ или просто δ.

Определение 2. Множество всех обобщенных функций в Ω мы обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)'$. Это множество с операциями

$$(T + S)(\varphi) = T(\varphi) + S(\varphi), \quad (\alpha T)(\varphi) = \alpha T(\varphi) \tag{7}$$

образует линейное пространство. Пространство $\mathfrak{D}(\Omega)'$ называется *пространством обобщенных функций* в Ω или *сопряженным* к $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Замечание. *Две обобщенные функции T_{f_1} и T_{f_2} равны* (т. е. $T_{f_1}(\varphi) = T_{f_2}(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$) *тогда и только тогда, когда почти всюду $f_1(x) = f_2(x)$*. Если это утверждение доказано, то можно установить взаимно однозначное соответствие $f \longleftrightarrow T_f$ между множеством всех локально интегрируемых на Ω функций и некоторым подмножеством пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$ (функции f_1 и f_2, для которых $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду, считаются эквивалентными), при котором

$$T_{f_1} + T_{f_2} = T_{f_1 + f_2}, \quad \alpha T_f = T_{\alpha f}. \tag{7$'$}$$

В этом смысле понятие обобщенной функции действительно является обобщением понятия локально интегрируемой функции. Для того чтобы доказать сформулированное выше утверждение, достаточно убедиться в том, что если $\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то локально интегрируемая функция f почти всюду в открытой области Ω пространства R^n обращается в нуль. Введем меру Бэра $\mu(B) = \int\limits_B f(x)\,dx$ [1]; тогда последнее условие означает, что $\int\limits_\Omega \varphi(x)\mu(dx) = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда на основании предложения 8 § 1 гл. I следует, что $\int\limits_\Omega \varphi(x)\mu(dx) = 0$ для всех $\varphi \in C_0^0(\Omega)$. Пусть B — некоторое бикомпактное G_δ-множество, принадлежащее Ω, т. е. $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, где

---

[1]) Здесь и далее под мерами Бэра подразумеваются произвольные (в том числе и комплексные) σ-аддитивные функции множеств, определенные на бэровских подмножествах B области Ω. — *Прим. перев.*

G_n — открытые относительно бикомпактные множества из Ω. По теореме Урысона из § 2 введения существует непрерывная функция $f_n(x)$, такая, что $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ для $x \in \Omega$, $f_n(x) = 1$ при $x \in G_{n+2}^a$ и $f_n(x) = 0$, когда $x \in G_n^a - G_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (не ограничивая общности, можно считать, что $\{G_n\}$ — монотонно убывающая последовательность открытых относительно бикомпактных множеств из Ω, причем $G_{n+2}^a \subseteq G_{n+1}$). Полагая $\varphi = f_n$ и $n \to \infty$, мы видим, что $\mu(B) = 0$ для всех бикомпактных G_δ-множеств B из области Ω. Бэровские множества области Ω входят в наименьшую σ-алгебру подмножеств, содержащую бикомпактные G_δ-множества области Ω. Отсюда, вследствие σ-аддитивности меры Бэра μ, мы можем заключить, что μ обращается в нуль для всех бэровских множеств из Ω. Следовательно, функция f (так называемая плотность меры μ) почти всюду в Ω равна нулю.

При помощи следующего предложения мы сможем определить операцию дифференцирования обобщенных функций.

Предложение 2. Если T — некоторая обобщенная функция в Ω, то формула

$$S(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \tag{8}$$

определяет в Ω другую обобщенную функцию S.

Доказательство. Легко проверить, что S — линейный функционал на $\mathfrak{D}(\Omega)$, ограниченный на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Определение 3. Обобщенная функция S, определенная формулой (8), называется *обобщенной производной* от T (по переменной x_1). Мы будем писать

$$S = \frac{\partial}{\partial x_1} T; \tag{9}$$

таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} T(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right). \tag{10}$$

Замечание. Определенное выше понятие представляет собой обобщение обычного понятия производной. В самом деле, если функция f непрерывно дифференцируема по x_1, то

$$\frac{\partial}{\partial x_1} T_f(\varphi) = -T_f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = -\int_\Omega \cdots \int f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_\Omega \cdots \int \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \varphi(x) dx_1 \ldots dx_n = T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\varphi);$$

это можно получить при помощи интегрирования по частям, учитывая, что функция $\varphi(x)$ тождественно равна нулю вне некоторого бикомпактного подмножества области Ω.

Следствие. Всякая обобщенная функция T в Ω бесконечно дифференцируема в смысле приведенного выше определения и

$$(D^jT)(\varphi)=(-1)^{|j|}T(D^j\varphi),$$
$$\text{где } |j|=\sum_{i=1}^{n} j_i, \qquad D^j=\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}. \tag{11}$$

Пример 1. *Функция Хевисайда* $H(x)$ определяется соотношениями

$$H(x)=1 \quad \text{при} \quad x\geqslant 0 \quad \text{и} \quad H(x)=0 \quad \text{при} \quad x<0. \tag{12}$$

Мы имеем

$$\frac{d}{dx}T_H=T_{\delta_0}, \tag{12'}$$

где T_{δ_0} есть *δ-функция Дирака*, сосредоточенная в начале координат пространства R^1. В самом деле, для всякой функции $\varphi\in\mathfrak{D}(R^1)$

$$\left(\frac{d}{dx}T_H\right)(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\varphi'(x)\,dx=$$
$$=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx=-[\varphi(x)]_0^{\infty}=\varphi(0).$$

Пример 2. Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную и непрерывную производную в открытом множестве $R^1-\bigcup_{j=1}^{k}x_j$ пространства R^1. *Скачком* функции $f(x)$ в точке $x=x_j$ назовем величину $s_j=f(x_j+0)-f(x_j-0)$. Так как

$$\left(\frac{d}{dx}T_f\right)(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)\,dx=\sum_j\varphi(x_j)s_j+\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)\,dx,$$

то

$$\frac{d}{dx}T_f=T_{f'}+\sum_j s_j\delta_{x_j}, \tag{12''}$$

где функционал $\delta_{x_j}\equiv T_{\delta_{x_j}}(\varphi)$ определяется формулой (6).

Пример 3. Пусть $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая функция на замкнутой ограниченной области $\Omega\subseteq R^n$ с гладкой границей S. Продолжим функцию f на все пространство R^n, полагая $f=0$ вне области Ω. Интегрируя по частям, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} T_f\right)(\varphi) = -\int\limits_{\Omega} f(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_S f(x)\varphi(x)\cos(\nu,\ x_j)\,dS + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx,$$

где ν — *внутренняя нормаль* к границе S, $(\nu,\ x_j) = (x_j,\ \nu)$ — угол между положительным направлением оси x_j и нормалью ν, а dS — элемент поверхности. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} + T_S, \text{ где } T_S(\varphi) = \int\limits_S f(x)\cos(\nu,\ x_j)\,\varphi(x)\,dS. \qquad (12''')$$

Следствие. Если функция $f(x) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ принадлежит классу C^2 на множестве Ω и равна нулю вне Ω, то из формулы (12‴) и соотношения $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum\limits_j \frac{\partial}{\partial x_j}\cos(x_j,\ \nu)$ вытекает *формула Грина*

$$(\Delta T_f)(\varphi) = T_{\Delta f}(\varphi) + \int\limits_S \frac{\partial f}{\partial \nu}\varphi(x)\,dS - \int\limits_S f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\,dS, \qquad (12'''')$$

где $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$ — оператор Лапласа.

Предложение 3. Если T — обобщенная функция в Ω и $f \in C^\infty(\Omega)$, то соотношение

$$S(\varphi) = T(f\varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \qquad (13)$$

определяет в Ω другую обобщенную функцию S.

Доказательство. Дифференцируя произведение $f\varphi$ при помощи формулы Лейбница, нетрудно убедиться в том, что S — линейный функционал на $\mathfrak{D}(\Omega)$, ограниченный на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Определение 4. Обобщенная функция S, определенная формулой (13), называется *произведением* обобщенной функции T на функцию f.

Формула Лейбница. Обозначим функционал S, определенный в (13), через fT; тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fT) = \frac{\partial f}{\partial x_j} T + f\frac{\partial T}{\partial x_j}, \qquad (14)$$

поскольку, согласно формуле Лейбница для производной $\partial(f\varphi)/\partial x_j$,

$$-T\left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = T\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi\right) - T\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)\right).$$

Формулу (14) можно обобщить следующим образом.

Пусть $P(\xi)$ — некоторый полином относительно переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор в частных производных $P(D)$ с постоянными коэффициентами, который получается, если в многочлен $P(\xi)$ подставить вместо переменных ξ_j операторы $i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ (мнимый коэффициент i^{-1} вводится для удобства изложения теории преобразования Фурье в гл. VI).

Теорема 3 (*Формула Хёрмандера* — обобщенная формула Лейбница). Имеет место формула

$$P(D)(fT) = \sum_{(\alpha)\geqslant 0} \frac{1}{(\alpha)!} D_\alpha f \cdot P^{(\alpha)}(D)T, \tag{15}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $1 \leqslant \alpha_j \leqslant n$, $(\alpha) = k$ при $k \neq 0$,

$$P^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial\xi_{\alpha_1}\partial\xi_{\alpha_2}\ldots\partial\xi_{\alpha_k}} P(\xi), \qquad D_\alpha = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_j}}, \tag{16}$$

$$P^{(0)}(\xi) = P(\xi), \qquad D_0 = I \text{ при } (\alpha) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Повторное применение формулы (14) дает тождество вида

$$P(D)(fT) = \sum_{(\alpha)\geqslant 0} D_\alpha f \cdot Q_\alpha(D)T, \tag{18}$$

где $Q_\alpha(D)$ — дифференциальные операторы, явный вид которых мы должны найти. Не ограничивая общности, можно допустить, что эти операторы выбраны инвариантными относительно перестановки индексов α. В самом деле, этого всегда можно добиться, деля каждое слагаемое, относящееся к данному значению (α), на число таких слагаемых, повторяя каждое новое слагаемое нужное число раз и перегруппировывая полученные таким способом члены.

Так как (18) — тождество, мы можем подставить в него $f(x) = e^{i\langle x, \xi\rangle}$ и $T = e^{i\langle x, \eta\rangle}$, где $\langle x, \xi\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j$, $\langle x, \eta\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\eta_j$. Тогда, применяя очевидную формулу

$$P(D)\, e^{i\langle x, \xi\rangle} = P(\xi)\, e^{i\langle x, \xi\rangle}, \tag{19}$$

мы получим соотношение

$$P(\xi + \eta) = \sum_\alpha \xi^\alpha Q_\alpha(\eta), \quad \text{где} \quad \xi^\alpha = \prod_j \xi_{\alpha_j}.\ [1]$$

[1]) При выводе этой формулы используются следующие очевидные свойства регулярного функционала T_ψ, соответствующего непрерывно дифференцируемой функции ψ: $DT_\psi = T_{(D\psi)}$ и $fT_\psi = T_{(\psi f)}$. — *Прим. перев.*

С другой стороны, по формуле Тейлора

$$P(\xi+\eta)=\sum_{\alpha}\frac{1}{(\alpha)!}\xi^{\alpha}P^{(\alpha)}(\eta),$$

откуда следует, что $Q_{\alpha}(\eta)=\frac{1}{(\alpha)!}P^{(\alpha)}(\eta)$.

9. *B-пространства и F-пространства*

В квазинормированном линейном пространстве X из равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ вытекает в силу неравенства треугольника $\|x_n-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши*

$$\lim_{n,\ m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0, \tag{1}$$

т. е. является *фундаментальной*.

Определение 1. Квазинормированное (соответственно нормированное) линейное пространство X мы будем называть F-пространством (соответственно B-пространством), если оно полно, т. е. если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X сильно сходится к некоторой точке x_{∞} этого пространства:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{\infty}\|=0, \qquad x_{\infty}\in X. \tag{2}$$

Предел x_{∞}, если он существует, определяется однозначно; это следует из неравенства треугольника $\|x-x'\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-x'\|$. Полное предгильбертово пространство называется *гильбертовым*.

Замечание. Термины F-пространство и B-пространство — это сокращения названий *пространство Фреше* и *пространство Банаха*. Заметим, что в книгах Бурбаки пространством Фреше называются локально выпуклые пространства, являющиеся квазинормированными и полными.

Предложение 1. Пусть Ω — некоторое открытое множество пространства R^n. Обозначим через $\mathfrak{E}(\Omega)=C^{\infty}(\Omega)$ локально выпуклое пространство, наделенное квазинормой в соответствии с предложением 6 § 1 гл. I. Пространство $\mathfrak{E}(\Omega)$ является F-пространством.

Доказательство. Условие $\lim\limits_{n,\ m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$ в пространстве $\mathfrak{E}(\Omega)$ означает, что для любого бикомпактного подмножества K из Ω и всякого дифференциального оператора D^{α} последовательность $\{D^{\alpha}f_n(x)\}$ сходится при $n\to\infty$ равномерно на множестве K. Следовательно, существует такая функция $f(x)\in C^{\infty}(\Omega)$, что