С другой стороны, по формуле Тейлора

$$P(\xi+\eta)=\sum_{\alpha}\frac{1}{(\alpha)!}\xi^{\alpha}P^{(\alpha)}(\eta),$$

откуда следует, что $Q_{\alpha}(\eta)=\frac{1}{(\alpha)!}P^{(\alpha)}(\eta)$.

9. *B-пространства и F-пространства*

В квазинормированном линейном пространстве X из равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ вытекает в силу неравенства треугольника $\|x_n-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши*

$$\lim_{n,\ m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0, \tag{1}$$

т. е. является *фундаментальной*.

Определение 1. Квазинормированное (соответственно нормированное) линейное пространство X мы будем называть F-пространством (соответственно B-пространством), если оно полно, т. е. если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X сильно сходится к некоторой точке x_{∞} этого пространства:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{\infty}\|=0, \qquad x_{\infty}\in X. \tag{2}$$

Предел x_{∞}, если он существует, определяется однозначно; это следует из неравенства треугольника $\|x-x'\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-x'\|$. Полное предгильбертово пространство называется *гильбертовым*.

Замечание. Термины F-пространство и B-пространство — это сокращения названий *пространство Фреше* и *пространство Банаха*. Заметим, что в книгах Бурбаки пространством Фреше называются локально выпуклые пространства, являющиеся квазинормированными и полными.

Предложение 1. Пусть Ω — некоторое открытое множество пространства R^n. Обозначим через $\mathfrak{E}(\Omega)=C^{\infty}(\Omega)$ локально выпуклое пространство, наделенное квазинормой в соответствии с предложением 6 § 1 гл. I. Пространство $\mathfrak{E}(\Omega)$ является F-пространством.

Доказательство. Условие $\lim\limits_{n,\ m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$ в пространстве $\mathfrak{E}(\Omega)$ означает, что для любого бикомпактного подмножества K из Ω и всякого дифференциального оператора D^{α} последовательность $\{D^{\alpha}f_n(x)\}$ сходится при $n\to\infty$ равномерно на множестве K. Следовательно, существует такая функция $f(x)\in C^{\infty}(\Omega)$, что

$\lim\limits_{n\to\infty} D^\alpha f_n(x) = D^\alpha f(x)$ равномерно на K. Поскольку D^α и K здесь произвольны, отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$ в пространстве $\mathfrak{E}(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Предложение 2. Пространство $L^p(S) = L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ является B-пространством. В частности, $L^2(S)$ и (l^2) — гильбертовы пространства.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n,\ m\to\infty} \| x_n - x_m \| = 0$ в $L^p(S)$. Тогда можно выбрать такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$\sum_k \| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < \infty.$$

Применяя неравенство треугольника и лемму Лебега — Фату к последовательности функций

$$y_t(s) = |x_{n_1}(s)| + \sum_{k=1}^{t} |x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)| \in L^p(S),$$

мы видим, что

$$\int_\Omega \left(\lim_{t\to\infty} (y_t(s))^p\right) m(ds) \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \| y_t \|^p \leqslant \left(\| x_{n_1} \| + \sum_{k=1}^{\infty} \| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| \right)^p.$$

Поэтому почти всюду существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} y_t(s)$. Следовательно, почти всюду существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} x_{n_{t+1}}(s) = x_\infty(s)$ и $x_\infty(s) \in L^p(S)$, так как $|x_{n_{t+1}}(s)| \leqslant \lim\limits_{t\to\infty} y_t(s) \in L^p(S)$. Применяя лемму Лебега — Фату еще раз, получаем

$$\| x_\infty - x_{n_k} \|^p = \int_\Omega \left(\lim_{t\to\infty} |x_{n_t}(s) - x_{n_k}(s)|^p \right) m(ds) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=k}^{\infty} \| x_{n_{l+1}} - x_{n_l} \| \right)^p.$$

Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \| x_\infty - x_{n_k} \| = 0$. Используя теперь неравенство треугольника и условие сходимости Коши (1), мы убеждаемся в том, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \| x_\infty - x_n \| \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \| x_\infty - x_{n_k} \| + \varlimsup_{k,\ n\to\infty} \| x_{n_k} - x_n \| = 0.$$

Этим завершается доказательство нашего утверждения. Одновременно мы доказали важное

Следствие. Всякая последовательность $\{x_n\} \in L^p(S)$, удовлетворяющая условию сходимости Коши (1), содержит некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такую, что

$$\text{конечный предел } \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(s) = x_\infty(s) \text{ существует почти всюду,}$$

$$x_\infty(s) \in L^p(S) \text{ и } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty. \tag{3}$$

Замечание. При доказательстве предыдущего предложения и следствия мы предполагали, что $1 \leqslant p < \infty$. Однако полученные результаты справедливы и для $p = \infty$, причем доказательство в этом случае оказывается даже более простым. Мы предлагаем читателю самостоятельно провести это доказательство.

Предложение 3. Пространство $A^2(G)$ является гильбертовым пространством.

Доказательство. Пусть $\{f_n(z)\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из $A^2(G)$. Так как $A^2(G)$ — линейное подпространство гильбертова пространства $L^2(G)$, существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, что

$$\text{конечный предел } \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = f_\infty(z) \text{ существует почти всюду,}$$

$$f_\infty \in L^2(G) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \int_G |f_\infty(z) - f_n(z)|^2\, dx\, dy = 0.$$

Мы должны показать, что функция $f_\infty(z)$ голоморфна в области G. Для этого допустим, что круг $|z - z_0| \leqslant \rho$ содержится в G. Разложение Тейлора $f_n(z) - f_m(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$ дает

$$\|f_n - f_m\|^2 \geqslant \int\limits_{|z-z_0|\leqslant\rho} |f_n(z) - f_m(z)|^2\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^\rho \left(\int_0^{2\pi} \sum_j c_j r^j e^{ij\theta} \sum_k \bar{c}_k r^k e^{-ik\theta}\, d\theta \right) r\, dr =$$

$$= \sum_j 2\pi \int_0^\rho |c_j|^2 r^{2j+1}\, dr = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2j+2} |c_j|^2 (2j+2)^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \pi |c_0|^2 \rho^2 = \pi\rho^2 |f_n(z_0) - f_m(z_0)|^2. \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что и сама последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится во всяком замкнутом круге, содержащемся в области G. Поскольку функции $f_n(z)$ голоморфны в G, то и $f_\infty(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ — голоморфная функция во всей области G.

Предложение 4. При условии $m(S) < \infty$ пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$ является F-пространством.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — некоторая фундаментальная последовательность элементов пространства $M(S, \mathfrak{B}, m)$. Так как сходимость в $M(S, \mathfrak{B}, m)$ — это сходимость по мере, то можно выбрать из $\{x_n(s)\}$ такую подпоследовательность $\{x_{n_k}(s)\}$, что

$$m(B_k) \leqslant 2^{-k} \text{ для } B_k = \{s \in S;\ 2^{-k} \leqslant |x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)|\}.$$

Последовательность

$$x_{n_k}(s) = x_{n_1}(s) + \sum_{j=1}^{k-1} (x_{n_{j+1}}(s) - x_{n_j}(s)) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

сильно сходится к некоторой функции, принадлежащей $M(S, \mathfrak{B}, m)$. В самом деле, если $s \notin \bigcup_{j=t}^{\infty} B_j$, то $\sum_{j=t}^{\infty} |x_{n_{j+1}}(s) - x_{n_j}(s)| \leqslant$ $\leqslant \sum_{j=t}^{\infty} 2^{-j} \leqslant 2^{1-t}$, и $m\left(\bigcup_{j=t}^{\infty} B_j\right) \leqslant \sum_{j=t}^{\infty} m(B_j) \leqslant \sum_{j=t}^{\infty} 2^{-j} \leqslant 2^{1-t}$; поэтому, полагая $t \to \infty$, мы видим, что последовательность $\{x_{n_k}(s)\}$ сходится m-п. в. к некоторой функции $x_\infty(s) \in M(S, \mathfrak{B}, m)$. Следовательно, $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_\infty\| = 0$, а так как $\lim_{n, m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$, то мы получаем, что $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_\infty\| = 0$.

Пространство (s). Совокупность (s) всех числовых последовательностей $\{\xi_n\}$ с квазинормой

$$\|\{\xi_n\}\| = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\xi_j| / (1 + |\xi_j|)$$

и операциями

$$\{\xi_n\} + \{\eta_n\} = \{\xi_n + \eta_n\}, \qquad \alpha\{\xi_n\} = \{\alpha\xi_n\}$$

образует F-пространство. Доказательство полноты для пространства (s) проводится так же, как для пространства $M(S, \mathfrak{B}, m)$. Квазинорма

$$\|\{\xi_n\}\| = \inf_{\varepsilon > 0} \operatorname{arc\,tg} \{\varepsilon + \text{количество чисел } \xi_n, \text{ удовлетворяющих неравенству } |\xi_n| > \varepsilon\}$$

определяет в пространстве (s) эквивалентную топологию.

Замечание. Ясно, что пространства $C(S)$, (c_0) и (c) являются B-пространствами. Полнота пространства (l^p) следует из полноты $L^p(S)$. Таким образом, по теореме 3 § 5 гл. I пространство H-L^2, так же как и (l^2), является гильбертовым.

Пространства Соболева $W^{k,p}(\Omega)$. Пусть Ω — открытое множество в R^n и k — некоторое положительное целое число. Обозначим через $W^{k,p}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ совокупность всех комплексных функций $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданных на Ω, таких, что f и все ее обобщенные производные $D^s f$ порядка $|s| = \sum_{j=1}^{n} s_j \leqslant k$ принадлежат $L^p(\Omega)$ [1]). Множество $W^{k,p}(\Omega)$ с операциями

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

и нормой

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|s| \leqslant k} \int_{\Omega} |D^s f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad dx = dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

образует нормированное линейное пространство, если считать всякие две функции f_1 и f_2 одним вектором пространства $W^{k,p}(\Omega)$, когда $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду в области Ω. Нетрудно заметить также, что $W^{k,2}(\Omega)$ — это предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_{k,2} = \left(\sum_{|s| \leqslant k} \int_{\Omega} D^s f(x) \cdot \overline{D^s g(x)} \, dx \right).$$

Предложение 5. Пространство $W^{k,p}(\Omega)$ является B-пространством. В частности, $W^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega)$ — это гильбертово пространство с нормой $\|f\|_k = \|f\|_{k,2}$ и скалярным произведением $(f, g)_k = (f, g)_{k,2}$.

Доказательство. Пусть $\{f_h\}$ — фундаментальная последовательность элементов пространства $W^{k,p}(\Omega)$. Тогда последовательность $\{D^s f_h\}$ при любом дифференциальном операторе D^s, для которого $|s| \leqslant k$, является фундаментальной последовательностью пространства $L^p(\Omega)$. Поэтому в силу полноты $L^p(\Omega)$ существуют такие функции $f^{(s)} \in L^p(\Omega)$ $(|s| \leqslant k)$, что $\lim_{h \to \infty} \int_{\Omega} |D^s f_h(x) - f^{(s)}(x)|^p \, dx = 0$. Применяя неравенство Гёльдера (гл. I, § 3) к бикомпактным множествам, принадлежащим Ω, нетрудно убедиться в том, что f_h — локально интегрируемая функция на Ω. Следовательно, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$T_{D^s f_h}(\varphi) = \int_{\Omega} D^s f_h(x) \cdot \varphi(x) \, dx = (-1)^{|s|} \int_{\Omega} f_h(x) \, D^s \varphi(x) \, dx.$$

---

[1]) Обобщенные производные для функций ввел С. Л. Соболев (см., например, [2]). — *Прим. перев.*

Используя неравенство Гёльдера еще раз, мы, учитывая равенство $\lim_{h\to\infty}\int_\Omega |f_h(x)-f^{(0)}(x)|^p\,dx=0$, получаем

$$\lim_{h\to\infty} T_{D^s f_h}(\varphi)=(-1)^{|s|}\,T_{f^{(0)}}(D^s\varphi)=D^sT_{f^{(0)}}(\varphi).$$

Аналогично, принимая во внимание равенство $\lim_{h\to\infty}\int_\Omega |D^sf_h(x)-$ $-f^{(s)}(x)|^p\,dx=0$, находим

$$\lim_{h\to\infty} T_{D^s f_h}(\varphi)=T_{f^{(s)}}(\varphi).$$

Следовательно, $D^sT_{f^{(0)}}=T_{f^{(s)}}$, а это означает, что обобщенная производная $D^sf^{(0)}$ равна $f^{(s)}$. Это показывает, что $\lim_{h\to\infty}\|f_h-f^{(0)}\|_{k,p}=0$ и, таким образом, пространство $W^{k,p}(\Omega)$ полно.

10. Пополнение

Полнота F-пространств (и B-пространств) играет важную роль в функциональном анализе, поскольку к таким пространствам можно применить теоремы Бэра о категориях, которые приводились в введении. Следующая теорема о *пополнении* будет часто использоваться в этой книге.

Теорема (о пополнении). Пусть X — квазинормированное линейное пространство; допустим, что оно не полно. Тогда X изоморфно и изометрично плотному линейному подпространству некоторого F-пространства $\tilde{X}$, т. е. существует взаимно однозначное соответствие $x \longleftrightarrow \tilde{x}$ между X и некоторым плотным линейным подпространством из $\tilde{X}$, такое, что

$$(\widetilde{x+y})=\tilde{x}+\tilde{y},\qquad (\widetilde{\alpha x})=\alpha\tilde{x},\qquad \|\tilde{x}\|=\|x\|. \tag{1}$$

Пространство $\tilde{X}$ определяется однозначно с точностью до изометрического изоморфизма и называется *пополнением* пространства X.

Если X — нормированное пространство, то $\tilde{X}$ является B-пространством.

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на идею Кантора, которая используется при построении вещественных чисел на базе множества рациональных чисел.

Совокупность всех фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ пространства X можно разбить на классы эквивалентных последовательностей, полагая $\{x_n\}\sim\{y_n\}$, если $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$. Класс, содержащий последовательность $\{x_n\}$, обозначим через $\{x_n\}'$. Сово-