Используя неравенство Гёльдера еще раз, мы, учитывая равенство $\lim_{h\to\infty}\int_\Omega |f_h(x)-f^{(0)}(x)|^p\,dx=0$, получаем

$$\lim_{h\to\infty} T_{D^s f_h}(\varphi)=(-1)^{|s|}\,T_{f^{(0)}}(D^s\varphi)=D^sT_{f^{(0)}}(\varphi).$$

Аналогично, принимая во внимание равенство $\lim_{h\to\infty}\int_\Omega |D^s f_h(x)-$ $-f^{(s)}(x)|^p\,dx=0$, находим

$$\lim_{h\to\infty} T_{D^s f_h}(\varphi)=T_{f^{(s)}}(\varphi).$$

Следовательно, $D^sT_{f^{(0)}}=T_{f^{(s)}}$, а это означает, что обобщенная производная $D^sf^{(0)}$ равна $f^{(s)}$. Это показывает, что $\lim_{h\to\infty}\|f_h-f^{(0)}\|_{k,\,p}=0$ и, таким образом, пространство $W^{k,\,p}(\Omega)$ полно.

10. Пополнение

Полнота F-пространств (и B-пространств) играет важную роль в функциональном анализе, поскольку к таким пространствам можно применить теоремы Бэра о категориях, которые приводились в введении. Следующая теорема о *пополнении* будет часто использоваться в этой книге.

Теорема (о пополнении). Пусть X — квазинормированное линейное пространство; допустим, что оно не полно. Тогда X изоморфно и изометрично плотному линейному подпространству некоторого F-пространства $\widetilde{X}$, т. е. существует взаимно однозначное соответствие $x \longleftrightarrow \widetilde{x}$ между X и некоторым плотным линейным подпространством из $\widetilde{X}$, такое, что

$$(\widetilde{x+y})=\widetilde{x}+\widetilde{y},\qquad (\widetilde{\alpha x})=\alpha\widetilde{x},\qquad \|\widetilde{x}\|=\|x\|. \tag{1}$$

Пространство $\widetilde{X}$ определяется однозначно с точностью до изометрического изоморфизма и называется *пополнением* пространства X.

Если X — нормированное пространство, то $\widetilde{X}$ является B-пространством.

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на идею Кантора, которая используется при построении вещественных чисел на базе множества рациональных чисел.

Совокупность всех фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ пространства X можно разбить на классы эквивалентных последовательностей, полагая $\{x_n\}\sim\{y_n\}$, если $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$. Класс, содержащий последовательность $\{x_n\}$, обозначим через $\{x_n\}'$. Совокупность $\tilde{X}$ всех таких классов $\tilde{x} = \{x_n\}'$ с операциями

$$\{x_n\}' + \{y_n\}' = \{x_n + y_n\}', \quad \alpha\{x_n\}' = \{\alpha x_n\}'$$

является линейным пространством. Так как $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leqslant \|x_n - x_m\|$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$ существует. Положим

$$\|\{x_n\}'\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Нетрудно заметить, что приведенные определения векторной суммы $\{x_n\}' + \{y_n\}'$, умножения на скаляр $\alpha\{x_n\}'$ и величины $\|\{x_n\}'\|$ не зависят от конкретного выбора представителей классов $\{x_n\}'$ и $\{y_n\}'$. Например, если $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x'_n\| + \lim_{n\to\infty} \|x'_n - x_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x'_n\|.$$

Аналогично получаем неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|x'_n\| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$, откуда $\|\{x_n{}'\}\| = \|\{x'_n\}'\|$.

Покажем, что $\|\{x_n\}'\|$ — квазинорма. Для этого мы должны убедиться в том, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \|\alpha\{x_n\}'\| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\|\{x_n\}'\|\to 0} \|\alpha\{x_n\}'\| = 0.$$

Первое из этих соотношений эквивалентно равенству

$$\lim_{\alpha\to 0} \lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0,$$

а второе — условию $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0$. Оба эти требования выполняются, так как функция $\|\alpha x\|$ непрерывна по обеим переменным α и x.

Чтобы доказать полноту построенного здесь пространства $\tilde{X}$, допустим, что $\{\tilde{x}_k\} = \{\{x_n^{(k)}\}\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из $\tilde{X}$. Для каждого k мы можем выбрать такое значение n_k, что

$$\left\| x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| < k^{-1} \quad \text{при} \quad m > n_k. \tag{2}$$

Далее можно показать, что последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ сходится к классу, содержащему фундаментальную последовательность элементов пространства X вида

$$\left\{x_{n_1}^{(1)},\ x_{n_2}^{(2)},\ \ldots,\ x_{n_k}^{(k)},\ \ldots\right\}. \tag{3}$$

Чтобы убедиться в этом, обозначим через $\bar{x}_{n_k}^{(k)}$ класс, содержащий последовательность

$$\left\{x_{n_k}^{(k)},\ x_{n_k}^{(k)},\ \ldots,\ x_{n_k}^{(k)},\ \ldots\right\}. \tag{4}$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\left\| \tilde{x}_k - \overline{x}_{n_k}^{(k)} \right\| = \lim_{m\to\infty} \left\| x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| \leqslant k^{-1}, \tag{5}$$

и поэтому

$$\left\| x_{n_k}^{(k)} - x_{n_m}^{(m)} \right\| = \left\| \overline{x_{n_k}^{(k)}} - \overline{x_{n_m}^{(m)}} \right\| \leqslant \left\| \overline{x_{n_k}^{(k)}} - \tilde{x}_k \right\| + \\ + \| \tilde{x}_k - \tilde{x}_m \| + \left\| \tilde{x}_m - \overline{x}_{n_m}^{(m)} \right\| \leqslant \| \tilde{x}_k - \tilde{x}_m \| + k^{-1} + m^{-1}.$$

Отсюда видно, что (3) — это фундаментальная последовательность элементов пространства X. Пусть $\tilde{x}$ — класс, содержащий последовательность (3). Тогда из неравенства (5) вытекает неравенство

$$\| \tilde{x} - \tilde{x}_k \| \leqslant \left\| \tilde{x} - \overline{x}_{n_k}^{(k)} \right\| + \left\| \overline{x}_{n_k}^{(k)} - \tilde{x}_k \right\| \leqslant \left\| \tilde{x} - \overline{x}_{n_k}^{(k)} \right\| + k^{-1}.$$

Как было показано выше,

$$\left\| \tilde{x} - \overline{x}_{n_k}^{(k)} \right\| \leqslant \lim_{p\to\infty} \left\| x_{n_p}^{(p)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| \leqslant \lim_{p\to\infty} \| \tilde{x}_p - \tilde{x}_k \| + k^{-1};$$

следовательно, мы доказали, что $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| \tilde{x} - \overline{x_{n_k}^{(k)}} \right\| = 0$, и, таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} \| \tilde{x} - \tilde{x}_k \| = 0$.

Приведенное доказательство показывает, что соответствие

$$X \ni x \longleftrightarrow \tilde{x} = \{x, x, \ldots, x, \ldots\}' = \overline{x}$$

действительно является изометрическим изоморфизмом и образ пространства X в $\tilde{X}$ является плотным в $\tilde{X}$. Последнее утверждение этой теоремы вполне очевидно.

Пример пополнения. Пусть Ω — открытое множество в R^n и $k < \infty$. Пополнение пространства $C_0^k(\Omega)$ с нормой

$$\| f \|_k = \left(\sum_{|s| \leqslant k} \int_\Omega | D^s f(x) |^2 \, dx \right)^{1/2}$$

мы обозначим через $H_0^k(\Omega)$. Таким образом, $H_0^k(\Omega)$ — это пополнение предгильбертова пространства $\hat{H}_0^k(\Omega)$, которое было определено в § 5 гл. I (пример 4). Поэтому $H_0^k(\Omega)$ — гильбертово пространство. Пополнение предгильбертова пространства $\hat{H}^k(\Omega)$, которое определялось в § 5 гл. I (пример 3), мы обозначим через $H^k(\Omega)$.

Элементы пространства $H_0^k(\Omega)$ можно выделить с помощью следующей процедуры: пусть $\{f_h\}$ — последовательность из $C_0^k(\Omega)$, фундаментальная по норме $\| f \|_k$. Тогда в силу полноты пространства $L^2(\Omega)$

существуют такие функции $f^{(s)}(x) \in L^2(\Omega)$ $\left(|s| = \sum_{j=1}^{n} s_j \leqslant k\right)$, что

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\Omega} |f^{(s)}(x) - D^s f_h(x)|^2 \, dx = 0 \qquad (dx = dx_1 \, dx_2 \, \ldots \, dx_n).$$

Так как скалярное произведение — это непрерывная функция по норме $L^2(\Omega)$, то для любой основной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы соотношения [1])

$$T_{f^{(s)}}(\varphi) = \lim_{h\to\infty} \langle D^s f_h, \varphi \rangle = \lim_{h\to\infty} (-1)^{|s|} \, T_{f_h}(D^s\varphi) =$$
$$= (-1)^{|s|} \lim_{h\to\infty} \langle f_h, D^s\varphi \rangle = (-1)^{|s|} \langle f^{(0)}, D^s\varphi \rangle = \left(D^s T_{f^{(0)}}\right)(\varphi).$$

Поэтому $f^{(s)} \in L^2(\Omega)$ и, следовательно, $f(s)$ является обобщенной производной функции $f^{(0)}: f^{(s)} = D^s f^{(0)}$.

Итак, мы доказали, что гильбертово пространство $H_0^k(\Omega)$ является линейным подпространством гильбертова пространства $W^k(\Omega)$ (пространства Соболева). Вообще говоря, $H_0^k(\Omega)$ является собственным подпространством пространства $W^k(\Omega)$. Однако справедливо следующее

Предложение. $H_0^k(R^n) = W^k(R^n)$.

Доказательство. Мы знаем, что пространство $W^k(R^n)$ состоит из всех таких функций $f(x) \in L^2(R^n)$, обобщенные производные которых $D^s f(x)$ $\left(|s| = \sum_{j=1}^{n} s_j \leqslant k\right)$ также принадлежат $L^2(R^n)$, причем норма в $W^k(R^n)$ определена формулой

$$\|f\|_k = \left(\sum_{|s| \leqslant k} |D^s f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Пусть $f \in W^k(R^n)$. Определим функции f_N следующим образом:

$$f_N(x) = \alpha_N(x) f(x),$$

где функции $\alpha_N(x) \in C_0^\infty(R^n)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ выбраны так, что $\alpha_N(x) = 1$ при $|x| \leqslant N$ и $\sup\limits_{x \in R^n;\ |s| \leqslant k;\ N = 1, 2, \ldots} |D^s \alpha_N(x)| < \infty.$

Тогда по формуле Лейбница

$$D^s f(x) - D^s f_N(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant N$$

и $D^s f(x) - D^s f_N(x)$ равняется линейной комбинации членов вида

$$D^t \alpha_N(x) \cdot D^u f(x), \quad \text{где} \quad |u| + |t| \leqslant k, \quad \text{при} \quad |x| > N.$$

[1]) Определение символа $\langle\ ,\ \rangle$ см. в § 4 введения. — *Прим. перев.*

Следовательно, поскольку $D^s f \in L^2(R^n)$ при $|s| \leqslant k$, мы видим, что $\lim\limits_{N\to\infty} \|D^s f_N - D^s f\|_0 = 0$, и поэтому $\lim\limits_{N\to\infty} \|f_N - f\|_k = 0$.

Таким образом, теперь достаточно показать, что для любой функции $f \in W^k(R^n)$ с бикомпактным носителем существует такая последовательность $\{f_p(x)\} \subseteq C_0^\infty(R^n)$, что $\lim\limits_{p\to\infty} \|f_p - f\|_k = 0$. С этой целью рассмотрим регуляризацию (гл. I, § 1 (16)) функции f:

$$f_a(x) = \int\limits_{R^n} f(y)\,\theta_a(x-y)\,dy, \qquad a > 0.$$

Дифференцируя, находим, что

$$D^s f_a(x) = \int\limits_{R^n} f(y)\,D_x^s\theta_a(x-y)\,dy = (-1)^{|s|}\int\limits_{R^n} f(y)\,D_y^s\theta_a(x-y)\,dy =$$
$$= (D^s T_f)(\theta_{a,x}) = \int\limits_{R^n} D^s f(y)\cdot\theta_a(x-y)\,dy,$$

где

$$\theta_{a,x}(y) = \theta_a(x-y), \qquad |s| \leqslant k.$$

Отсюда, используя неравенство Шварца, получаем

$$\int\limits_{R^n} |D^s f_a(x) - D^s f(x)|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{R^n} \theta_a(x-y)\,dy\right)\int\limits_{R^n}\left[\int\limits_{R^n} |D_y^s f(y) - D_x^s f(x)|^2\,\theta_a(x-y)\,dy\right]dx =$$
$$= \int\limits_{|\varepsilon|\leqslant a}\left[\int\limits_{R^n} |D_y^s f(y) - D_y^s f(y+\varepsilon)|^2\,dy\right]\theta_a(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

где

$$y + \varepsilon = (y_1+\varepsilon_1,\ y_2+\varepsilon_2,\ \ldots,\ y_n+\varepsilon_n).$$

Мы знаем, что внутренний интеграл в последнем выражении справа стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$ (теорема 1 из § 3 введения); следовательно, $\lim\limits_{a\to 0}\int\limits_{R^n} |D^s f_a(x) - D^s f(x)|^2\,dx = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{a\to 0}\|f_a - f\|_k = 0$, откуда и вытекает существование последовательности $\{f_p\} \in C_0^\infty(R^n)$, такой, что $\lim\limits_{p\to\infty}\|f_p - f\|_k = 0$. Поэтому пополнение $H_0^k(R^n)$ пространства $C_0^k(R^n)$ по норме $\|\ \|_k$ совпадает с пространством $W^k(R^n)$.

Следствие. $H_0^k(R^n) = H^k(R^n) = W^k(R^n)$.