11. Факторпространства B-пространств

Пусть X — некоторое нормированное линейное пространство, а M — замкнутое линейное подпространство в X. Рассмотрим факторпространство X/M, т. е. пространство, элементами которого служат классы эквивалентности ξ по модулю M. Поскольку M замкнуто, эти классы ξ также замкнуты в X.

Предложение. Положим

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\|; \tag{1}$$

тогда $\|\xi\|$ удовлетворяет всем аксиомам, определяющим норму.

Доказательство. Если $\xi = 0$, то класс ξ совпадает с M и содержит нулевой вектор пространства X. В этом случае из (1) следует, что $\|\xi\| = 0$. Допустим теперь, что для некоторого ξ мы имеем $\|\xi\| = 0$. Тогда из (1) вытекает, что этот класс содержит последовательность $\{x_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, поэтому нулевой вектор пространства X в силу замкнутости класса ξ в X принадлежит ξ. Это означает, что $\xi = M$ и, следовательно, ξ — нулевой вектор пространства X/M.

Теперь предположим, что $\xi, \eta \in X/M$. По определению (1) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие векторы $x \in \xi$, $y \in \eta$, что

$$\|x\| \leqslant \|\xi\| + \varepsilon, \quad \|y\| \leqslant \|\eta\| + \varepsilon.$$

Следовательно, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\| + 2\varepsilon$. С другой стороны, $(x+y) \in (\xi+\eta)$, и поэтому, согласно (1), $\|\xi+\eta\| \leqslant \|x+y\|$. Таким образом, $\|\xi+\eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\| + 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, мы приходим к неравенству треугольника $\|\xi+\eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|$.

Наконец, нетрудно проверить, что аксиома $\|\alpha\xi\| = |\alpha| \cdot \|\xi\|$ также выполняется.

Определение. Пространство X/M с нормой (1) называется *нормированным факторпространством.*

Теорема. Если X есть B-пространство, а M — замкнутое линейное подпространство в X, то нормированное факторпространство X/M тоже является B-пространством.

Доказательство. Пусть $\{\xi_n\}$ — фундаментальная последовательность в X/M. Тогда $\{\xi_n\}$ содержит такую подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$, что $\left\|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\right\| < 2^{-k-2}$. Далее по определению (1) нормы пространства X/M в каждом из классов $\left(\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\right)$ можно выбрать такой вектор y_k, что

$$\|y_k\| < \left\|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\right\| + 2^{-k-2} < 2^{-k-1}.$$

Пусть $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$. Тогда ряд $x_{n_1} + y_1 + y_2 + \cdots$ сходится по норме; следовательно, в силу полноты пространства X он сходится к некоторому элементу $x \in X$. Пусть ξ — класс, содержащий x. Мы докажем, что $\xi = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

Обозначим через s_k частичные суммы $x_{n_1} + y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ написанного выше ряда. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \|x - s_k\| = 0$. Но, с другой стороны, из соотношений $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$, $y_p \in (\xi_{n_{p+1}} - \xi_{n_p})$ следует, что $s_k \in \xi_{n_k}$, и поэтому, согласно (1),

$$\|\xi - \xi_{n_k}\| \leqslant \|x - s_k\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Учитывая теперь тот факт, что последовательность $\{\xi_n\}$ фундаментальная, и применяя неравенство $\|\xi - \xi_n\| \leqslant \|\xi - \xi_{n_k}\| + \|\xi_{n_k} - \xi_n\|$, мы получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \|\xi - \xi_n\| = 0$, что и требовалось доказать.

12. Разбиение единицы

В следующем параграфе мы введем понятие носителя обобщенной функции. Для этого мы определим здесь *разбиение единицы* и докажем его существование.

Предложение. Пусть G — открытое множество в R^n. Пусть семейство $\{U\}$ открытых подмножеств U из G образует *базу открытых множеств* в G, т. е. всякое открытое подмножество из G можно представить в виде объединения открытых множеств, входящих в семейство $\{U\}$.

Тогда из семейства $\{U\}$ можно выделить систему открытых множеств, обладающую следующими свойствами:

объединение множеств этой системы совпадает с G; (1)

всякое бикомпактное подмножество множества G имеет непустые пересечения лишь с конечным числом множеств этой системы. (2)

Определение 1. Систему открытых множеств, удовлетворяющую условиям (1) и (2), мы назовем *локально конечным* открытым покрытием области G, соответствующим системе $\{U\}$.

Доказательство предложения. Множество G можно представить в виде объединения счетного числа бикомпактных подмножеств, например, всех замкнутых шаров из G с рациональными радиусами и центрами.

Поэтому существует последовательность бикомпактных подмножеств K_r, такая, что (1°) $K_r \subseteq K_{r+1}$ $(r = 1, 2, \ldots)$; (2°) G является