Пусть $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$. Тогда ряд $x_{n_1} + y_1 + y_2 + \cdots$ сходится по норме; следовательно, в силу полноты пространства X он сходится к некоторому элементу $x \in X$. Пусть ξ — класс, содержащий x. Мы докажем, что $\xi = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

Обозначим через s_k частичные суммы $x_{n_1} + y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ написанного выше ряда. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \| x - s_k \| = 0$. Но, с другой стороны, из соотношений $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$, $y_p \in (\xi_{n_{p+1}} - \xi_{n_p})$ следует, что $s_k \in \xi_{n_k}$, и поэтому, согласно (1),

$$\| \xi - \xi_{n_k} \| \leqslant \| x - s_k \| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Учитывая теперь тот факт, что последовательность $\{\xi_n\}$ фундаментальная, и применяя неравенство $\| \xi - \xi_n \| \leqslant \| \xi - \xi_{n_k} \| + \| \xi_{n_k} - \xi_n \|$, мы получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \| \xi - \xi_n \| = 0$, что и требовалось доказать.

12. Разбиение единицы

В следующем параграфе мы введем понятие носителя обобщенной функции. Для этого мы определим здесь *разбиение единицы* и докажем его существование.

Предложение. Пусть G — открытое множество в R^n. Пусть семейство $\{U\}$ открытых подмножеств U из G образует *базу открытых множеств* в G, т. е. всякое открытое подмножество из G можно представить в виде объединения открытых множеств, входящих в семейство $\{U\}$.

Тогда из семейства $\{U\}$ можно выделить систему открытых множеств, обладающую следующими свойствами:

объединение множеств этой системы совпадает с G; (1)

всякое бикомпактное подмножество множества G имеет непустые пересечения лишь с конечным числом множеств этой системы. (2)

Определение 1. Систему открытых множеств, удовлетворяющую условиям (1) и (2), мы назовем *локально конечным* открытым покрытием области G, соответствующим системе $\{U\}$.

Доказательство предложения. Множество G можно представить в виде объединения счетного числа бикомпактных подмножеств, например, всех замкнутых шаров из G с рациональными радиусами и центрами.

Поэтому существует последовательность бикомпактных подмножеств K_r, такая, что (1°) $K_r \subseteq K_{r+1}$ ($r = 1, 2, \ldots$); (2°) G является объединением множеств K_r; (3°) каждое множество K_r содержится во внутренности K_{r+1}^i множества K_{r+1}. Положим

$$U_r = K_{r+1}^i - K_r \quad \text{и} \quad V_r = K_r - K_{r-1}^i,$$

причем условимся, что $K_0 \equiv K_{-1} = \emptyset$ (пустое множество). По построению множества U_r открыты, а V_r бикомпактны, причем $G = \bigcup_{r=1}^{\infty} V_r$. Для каждой точки $x \in V_r$ выберем теперь такое открытое множество $U(x;\, r) \in \{U\}$, что $x \in U(x;\, r) \subseteq U_r$. Так как V_r бикомпактно, существует такая конечная система точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(h_r)}$ множества V_r, что $V_r \subseteq \bigcup_{i=1}^{h_r} U(x^{(i)};\, r)$. Тогда система открытых множеств $U(x^{(i)};\, r)$ $(r = 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant i \leqslant h_r)$ образует локально конечное открытое покрытие множества G, соответствующее системе $\{U\}$, так как всякое бикомпактное множество из G имеет непустые пересечения лишь с конечным числом множеств U_r.

Теорема (*разбиение единицы*). Пусть G — открытое множество в пространстве R^n. Допустим, что семейство открытых множеств $\{G_i;\, i \in I\}$ покрывает G, т. е. $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Тогда существует такая система функций $\{\alpha_j(x);\, j \in J\}$ класса $C_0^\infty(R^n)$, что

для каждого $j \in J$ носитель $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ содержится в некотором множестве G_i; (3)

$$0 \leqslant \alpha_j(x) \leqslant 1 \quad \text{для каждого} \quad j \in J; \tag{4}$$

$$\sum_{j \in J} \alpha_j(x) \equiv 1 \quad \text{для всех} \quad x \in G\,[1]. \tag{5}$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x^{(0)} \in G$ и выберем множество G_i, содержащее $x^{(0)}$. Пусть замкнутый шар $S(x^{(0)};\, r)$ с центром $x^{(0)}$ и радиусом r лежит в G_i. Построим, как в § 1 гл. I (14), функцию $\beta_{x^{(0)}}^{(r)}(x) \in C_0^\infty(R^n)$, обладающую следующими свойствами:

$$\beta_{x^{(0)}}^{(r)}(x) > 0 \text{ при } |x - x^{(0)}| < r, \quad \beta_{x^{(0)}}^{(r)}(x) = 0 \text{ при } |x - x^{(0)}| \geqslant r.$$

Положим $U_{x^{(0)}}^{(r)} = \{x;\, \beta_{x^{(0)}}^{(r)}(x) \neq 0\}$. Тогда $U_{x^{(0)}}^{(r)} \subseteq G_i$, $\bigcup_{x^{(0)} \in G,\, r > 0} U_{x^{(0)}}^{(r)} = G$ и, кроме того, множества $\operatorname{supp}\left(\beta_{x^{(0)}}^{(r)}\right)$ бикомпактны.

---

[1]) Далее доказано, что при каждом $x \in G$ отлично от нуля лишь конечное число функций $\alpha_j(x)$, $j \in J$, поэтому запись $\sum_{j \in J} \alpha_j(x)$ имеет смысл. — *Прим. перев.*

Согласно доказанному предложению, существует локально конечное открытое покрытие $\{U_j;\ j\in J\}$ множества G, соответствующее базе $\left\{U^{(r)}_{x^{(0)}};\ x^{(0)}\in G,\ r>0\right\}$ открытых множеств из G. Пусть $\beta_j(x)$ — любая функция семейства $\left\{\beta^{(r)}_{x^{(0)}}(x)\right\}$, определяющая множество U_j. Тогда, поскольку $\{U_j;\ j\in J\}$ — локально конечное открытое покрытие множества G, для каждой фиксированной точки $x\in G$ имеется лишь конечное число функций $\beta_j(x)$, отличных от нуля в x. Поэтому сумма $s(x)=\sum_{j\in J}\beta_j(x)$ действительно определена на множестве G и положительна в каждой точке x области G. Следовательно, функции

$$\alpha_j(x)=\beta_j(x)/s(x) \qquad (j\in J)$$

удовлетворяют условию теоремы.

Определение 2. Система функций $\{\alpha_j(x);\ j\in J\}$, определенная выше, называется *разбиением единицы*, соответствующим покрытию $\{G_i;\ i\in I\}$.

13. Обобщенные функции с бикомпактными носителями

Определение 1. Мы будем говорить, что обобщенная функция $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ обращается в нуль на открытом множестве U области Ω, если $T(\varphi)=0$ для всякой функции $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$, носитель которой содержится в U. *Носителем* $\operatorname{supp}(T)$ обобщенной функции T мы назовем наименьшее замкнутое подмножество F из Ω, такое, что обобщенная функция T обращается в нуль на множестве $\Omega - F$.

Чтобы обосновать это определение, мы должны доказать существование наибольшего открытого множества в Ω, на котором обобщенная функция T обращается в нуль. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. Если обобщенная функция $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ обращается в нуль на каждом множестве U_i некоторого семейства $\{U_i;\ i\in I\}$ открытых множеств области Ω, то T обращается в нуль на множестве $U=\bigcup_{i\in I}U_i$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ — функция, для которой $\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq U$. Построим разбиение единицы $\{\alpha_j(x);\ j\in J\}$, соответствующее покрытию множества Ω, состоящему из всех множеств семейства $\{U_i;\ i\in I\}$ и множества $\Omega-\operatorname{supp}(\varphi)$. Тогда $\varphi=\sum_{j\in J}\alpha_j\varphi$ — конечная сумма, и поэтому $T(\varphi)=\sum_{j\in J}T(\alpha_j\varphi)$. Если носитель $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ содержится в некотором множестве U_i, то по предположению $T(\alpha_j\varphi)=0$; если $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ содержится в $\Omega-\operatorname{supp}(\varphi)$, то $\alpha_j\varphi=0$ и, следовательно, $T(\alpha_j\varphi)=0$. Таким образом, $T(\varphi)=0$.