Согласно доказанному предложению, существует локально конечное открытое покрытие $\{U_j;\ j \in J\}$ множества G, соответствующее базе $\{U^{(r)}_{x^{(0)}};\ x^{(0)} \in G,\ r > 0\}$ открытых множеств из G. Пусть $\beta_j(x)$ — любая функция семейства $\{\beta^{(r)}_{x^{(0)}}(x)\}$, определяющая множество U_j. Тогда, поскольку $\{U_j;\ j \in J\}$ — локально конечное открытое покрытие множества G, для каждой фиксированной точки $x \in G$ имеется лишь конечное число функций $\beta_j(x)$, отличных от нуля в x. Поэтому сумма $s(x) = \sum_{j \in J} \beta_j(x)$ действительно определена на множестве G и положительна в каждой точке x области G. Следовательно, функции

$$\alpha_j(x) = \beta_j(x)/s(x) \qquad (j \in J)$$

удовлетворяют условию теоремы.

Определение 2. Система функций $\{\alpha_j(x);\ j \in J\}$, определенная выше, называется *разбиением единицы*, соответствующим покрытию $\{G_i;\ i \in I\}$.

13. Обобщенные функции с бикомпактными носителями

Определение 1. Мы будем говорить, что обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ обращается в нуль на открытом множестве U области Ω, если $T(\varphi) = 0$ для всякой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, носитель которой содержится в U. *Носителем* $\operatorname{supp}(T)$ обобщенной функции T мы назовем наименьшее замкнутое подмножество F из Ω, такое, что обобщенная функция T обращается в нуль на множестве $\Omega - F$.

Чтобы обосновать это определение, мы должны доказать существование наибольшего открытого множества в Ω, на котором обобщенная функция T обращается в нуль. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. Если обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ обращается в нуль на каждом множестве U_i некоторого семейства $\{U_i;\ i \in I\}$ открытых множеств области Ω, то T обращается в нуль на множестве $U = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ — функция, для которой $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U$. Построим разбиение единицы $\{\alpha_j(x);\ j \in J\}$, соответствующее покрытию множества Ω, состоящему из всех множеств семейства $\{U_i;\ i \in I\}$ и множества $\Omega - \operatorname{supp}(\varphi)$. Тогда $\varphi = \sum_{j \in J} \alpha_j \varphi$ — конечная сумма, и поэтому $T(\varphi) = \sum_{j \in J} T(\alpha_j \varphi)$. Если носитель $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ содержится в некотором множестве U_i, то по предположению $T(\alpha_j \varphi) = 0$; если $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ содержится в $\Omega - \operatorname{supp}(\varphi)$, то $\alpha_j \varphi = 0$ и, следовательно, $T(\alpha_j \varphi) = 0$. Таким образом, $T(\varphi) = 0$.

Предложение 1. Подмножество B пространства $\mathfrak{E}(\Omega)$ ограничено тогда и только тогда, когда для любого дифференциального оператора D^j и всякого бикомпактного подмножества K из Ω семейство функций $\{D^j f(x);\ f \in B\}$ равномерно ограничено на K.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из определения полунорм, с помощью которых в пространстве $\mathfrak{E}(\Omega)$ вводится топология.

Предложение 2. Линейный функционал T на $\mathfrak{E}(\Omega)$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен на каждом ограниченном множестве пространства $\mathfrak{E}(\Omega)$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{E}(\Omega)$ — квазинормированное линейное пространство, это утверждение следует из теоремы 2 § 7 гл. I.

Предложение 3. Обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ с бикомпактным носителем может быть единственным образом продолжена до непрерывного линейного функционала T_0 на $\mathfrak{E}(\Omega)$, такого, что $T_0(f) = 0$ для всякой функции $f \in \mathfrak{E}(\Omega)$, обращающейся в нуль в некоторой окрестности носителя $\operatorname{supp}(T)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp}(T) = K$, где K — бикомпактное подмножество области Ω. Для каждой точки $x^0 \in K$ и произвольного $\varepsilon > 0$ выберем шар $S(x^0;\ \varepsilon)$ с центром x^0 радиуса $\varepsilon > 0$. При любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ бикомпактное множество K покрывается конечным числом шаров вида $S(x^0;\ \varepsilon)$, где $x^0 \in K$. Пусть $\{\alpha_j(x);\ j \in J\}$ — разбиение единицы, соответствующее этой конечной системе шаров. Тогда функция $\psi = \sum\limits_{\operatorname{supp}(\alpha_j) \cap K' \neq \emptyset} \alpha_j(x)$, где K' — любая бикомпактная окрестность множества K, содержащаяся во внутренности упомянутой выше конечной системы шаров, удовлетворяет следующему условию:

$$\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega) \text{ и } \psi(x) = 1 \text{ в некоторой окрестности множества } K.$$

Определим теперь значения функционала $T_0(f)$ для функций $f \in C^\infty(\Omega)$ соотношением $T_0(f) = T(\psi f)$. Это определение не зависит от выбора функции ψ. В самом деле, если функция $\psi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ равна 1 в некоторой окрестности множества K, то для любой функции $f \in C^\infty(\Omega)$ функция $(\psi - \psi_1) f \in \mathfrak{D}(\Omega)$ обращается в нуль в окрестности множества K и, таким образом, $T(\psi f) - T(\psi_1 f) = T((\psi - \psi_1) f) = 0$.

Применяя формулу Лейбница для дифференцирования ψf, нетрудно заметить, что если f пробегает ограниченное множество пространства $\mathfrak{E}(\Omega)$, то ψf пробегает ограниченное множество пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$. Таким образом, поскольку обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ ограничена на ограниченных множествах из $\mathfrak{D}(\Omega)$, функционал T_0 ограничен на ограниченных множествах пространства $\mathfrak{E}(\Omega)$. Следовательно, по теореме 2 § 7 гл. I, о которой мы упоминали выше, T_0 — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{E}(\Omega)$. Пусть теперь функция $f \in \mathfrak{E}(\Omega)$ обращается в нуль в некоторой окрестности $U(K)$ множества K. Тогда, выбирая функцию $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, которая обращается в нуль на множестве $\Omega - U(K)$, мы убеждаемся в том, что $T_0(f) = T(\psi f) = 0$.

Предложение 4. Пусть K' — носитель функции ψ, определенной выше при построении функционала T_0. Тогда существуют такие постоянные C и k, что

$$|T_0(f)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K'} |D^j f(x)| \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Доказательство. Так как T — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{D}(\Omega)$, то для всякого бикомпактного множества K' из Ω существуют такие постоянные C' и k', что

$$|T(\varphi)| \leqslant C' \sup_{|j| \leqslant k',\ x \in K'} |D^j \varphi(x)| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_{K'}(\Omega)$$

(см. следствие предложения 1 в § 8 гл. I). Но для любой функции $g \in C^\infty(\Omega)$ мы имеем $\varphi = \psi g \in \mathfrak{D}_{K'}(\Omega)$. Поэтому, дифференцируя с применением формулы Лейбница, мы получаем

$$\sup_{|j| \leqslant k',\ x \in K'} |D^j(\psi g)(x)| \leqslant C'' \sup_{|j| \leqslant k',\ x \in K'} |D^j g(x)|,$$

где постоянная C'' не зависит от выбора g. Полагая теперь $g = f$ и $k = k'$, мы убеждаемся в справедливости утверждения.

Предложение 5. Пусть S_0 — линейный функционал на $C^\infty(\Omega)$, такой, что для некоторой постоянной C, положительного целого числа k и бикомпактного подмножества K области Ω имеем

$$|S_0(f)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j f(x)| \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Тогда сужение функционала S_0 на $C_0^\infty(\Omega)$ представляет собой обобщенную функцию T, носитель которой содержится в K.

Доказательство. Заметим, что если функция f тождественно равна нулю в некоторой окрестности множества K, то $S_0(f) = 0$. Поэтому если функция $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ равна 1 в окрестности множества K, то

$$S_0(f) = S_0(\psi f) \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Легко видеть, что если f пробегает некоторое ограниченное множество функций из пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$, то, согласно формуле Лейбница, ψf пробегает некоторое множество функций $\{\psi f\}$, которое содержится в множестве вида

$$\left\{g \in C^\infty(\Omega); \quad \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j g(x)| = C_k < \infty\right\}.$$

Таким образом, функционал $S_0(\psi f) = T(f)$ ограничен на ограниченных множествах пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$, и поэтому T — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. Совокупность всех обобщенных функций в Ω с бикомпактными носителями совпадает с пространством $\mathfrak{E}(\Omega)'$ всех непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{E}(\Omega)$, т. е. с пространством, *сопряженным* к $\mathfrak{E}(\Omega)$. Линейный функционал T на $C^\infty(\Omega)$ принадлежит $\mathfrak{E}(\Omega)'$ тогда и только тогда, когда для некоторых постоянных C и k и бикомпактного подмножества K из Ω мы имеем

$$|T(f)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j f(x)| \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Теперь мы докажем теорему, в которой дается общий вид обобщенных функций с носителями, состоящими из одной-единственной точки.

Теорема 3. Пусть открытое множество Ω пространства R^n содержит начало координат. Тогда всякая обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(\Omega)'$, носитель которой состоит из одной точки — начала координат, может быть представлена в виде конечной линейной комбинации δ-функций Дирака, сосредоточенных в точке $x=0$, и их производных.

Доказательство. По предыдущей теореме 2 для всякой такой обобщенной функции T существуют константы C и k и бикомпактное подмножество K области Ω, содержащее начало координат, такие, что

$$|T(f)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j f(x)| \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Докажем, что если $D^j f(0)=0$ для всех значений j, таких, что $|j| \leqslant k$, то $T(f)=0$. С этой целью выберем функцию $\psi \in C^\infty(\Omega)$, равную 1 в некоторой окрестности нуля, и положим

$$f_\varepsilon(x) = f(x)\psi(x/\varepsilon).$$

Так как $f=f_\varepsilon$ в окрестности начала координат, то $T(f)=T(f_\varepsilon)$. По формуле Лейбница производная функции f_ε порядка $\leqslant k$ представляет собой линейную комбинацию членов вида $|\varepsilon|^{-j} D^j\psi \cdot D^i f$, где $|i|+|j| \leqslant k$. Поскольку, согласно сделанным предположениям, $D^i f(0)=0$ при $|i| \leqslant k$, мы, применяя формулу Тейлора, находим, что производная порядка $|s|$ от f_ε является величиной $O(\varepsilon^{k+1-|s|})$ на носителе функции $\psi(x/\varepsilon)$. Поэтому при $\varepsilon \downarrow 0$ [1]) производные функции f_ε порядка $\leqslant k$ стремятся к нулю равномерно в окрестности начала координат. Следовательно, $T(f)=\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T(f_\varepsilon)=0$. Для произвольной функции $f \in \mathfrak{D}(\Omega)$ обозначим через f_k сумму членов ее тейлоровского разложения в окрестности начала координат до

[1]) Стрелки $\downarrow$ и $\uparrow$ обозначают здесь и далее приближения к предельному значению соответственно слева и справа. — *Прим. перев.*

порядка k включительно. Тогда, как было показано выше,

$$T(f)=T(f_k)+T(f-f_k)=T(f_k)+0=T(f_k).$$

Это показывает, что T является линейной комбинацией линейных функционалов, значения которых определяются значениями производных порядка не выше k функции f в начале координат; тем самым доказано утверждение теоремы.

14. Прямое произведение обобщенных функций

Сначала мы докажем следующую теорему об аппроксимации.

Теорема 1. Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)\in R^m$, $z=x\times y=(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)\in R^{n+m}$. Тогда для всякой функции $\varphi(z)=\varphi(x, y)\in C_0^\infty(R^{n+m})$ можно выбрать такие функции $u_{ij}(x)\in C_0^\infty(R^n)$ и $v_{ij}(y)\in C_0^\infty(R^m)$, что последовательность функций

$$\varphi_i(z)=\varphi_i(x, y)=\sum_{j=1}^{k_i} u_{ij}(x)\,v_{ij}(y) \tag{1}$$

при $i\to\infty$ стремится в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ к функции $\varphi(z)=\varphi(x, y)$.

Доказательство. Мы докажем эту теорему для случая $m=n=1$. Положим

$$\Phi(x, y, t)=$$
$$=(2\sqrt{\pi t})^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\varepsilon, \eta)\exp(-((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)/4t)\,d\xi\,d\eta \tag{2}$$

при $t>0$ и $\Phi(x, y, 0)=\varphi(x, y)$.

Замена переменных $\xi_1=(\xi-x)/2\sqrt{t}$, $\eta_1=(\eta-y)/2\sqrt{t}$ приводит функцию Φ к виду

$$\Phi(x, y, t)=(\sqrt{\pi})^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\xi_1\sqrt{t}, y+2\eta_1\sqrt{t})e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}\,d\xi_1\,d\eta_1.$$

Отсюда, поскольку $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}\,d\xi_1\,d\eta_1=\pi$, получаем

$$\Phi(x, y, t)-\varphi(x, y)|\leqslant$$
$$\leqslant(\sqrt{\pi})^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+2\xi\sqrt{t}, y+2\eta\sqrt{t})-\varphi(x, y)|\,e^{-\xi^2-\eta^2}\,d\xi\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\pi^{-1}\left\{\iint_{\xi^2+\eta^2\geqslant T^2}+\iint_{\xi^2+\eta^2<T^2}\right\}.$$