порядка k включительно. Тогда, как было показано выше,

$$T(f)=T(f_k)+T(f-f_k)=T(f_k)+0=T(f_k).$$

Это показывает, что T является линейной комбинацией линейных функционалов, значения которых определяются значениями производных порядка не выше k функции f в начале координат; тем самым доказано утверждение теоремы.

14. Прямое произведение обобщенных функций

Сначала мы докажем следующую теорему об аппроксимации.

Теорема 1. Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in R^m$, $z=x \times y=(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) \in R^{n+m}$. Тогда для всякой функции $\varphi(z)=\varphi(x, y) \in C_0^\infty(R^{n+m})$ можно выбрать такие функции $u_{ij}(x) \in C_0^\infty(R^n)$ и $v_{ij}(y) \in C_0^\infty(R^m)$, что последовательность функций

$$\varphi_i(z)=\varphi_i(x, y)=\sum_{j=1}^{k_i} u_{ij}(x)\, v_{ij}(y) \tag{1}$$

при $i \to \infty$ стремится в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ к функции $\varphi(z)=\varphi(x, y)$.

Доказательство. Мы докажем эту теорему для случая $m=n=1$. Положим

$$\Phi(x, y, t)=$$
$$=(2\sqrt{\pi t})^{-2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon, \eta) \exp\left(-((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)/4t\right) d\xi\, d\eta \tag{2}$$

при $t>0$ и $\Phi(x, y, 0)=\varphi(x, y)$.

Замена переменных $\xi_1=(\xi-x)/2\sqrt{t}$, $\eta_1=(\eta-y)/2\sqrt{t}$ приводит функцию Φ к виду

$$\Phi(x, y, t)=(\sqrt{\pi})^{-2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+2\xi_1\sqrt{t},\ y+2\eta_1\sqrt{t})\, e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}\, d\xi_1\, d\eta_1.$$

Отсюда, поскольку $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}\, d\xi_1\, d\eta_1=\pi$, получаем

$$\Phi(x, y, t)-\varphi(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant (\sqrt{\pi})^{-2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+2\xi\sqrt{t},\ y+2\eta\sqrt{t})-\varphi(x, y)|\, e^{-\xi^2-\eta^2}\, d\xi\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \pi^{-1}\left\{\iint_{\xi^2+\eta^2 \geqslant T^2} + \iint_{\xi^2+\eta^2 < T^2}\right\}.$$

Так как функция φ ограничена, а функция $e^{-\xi^2-\eta^2}$ интегрируема в R^2, то первый интеграл в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $T \uparrow \infty$. Второй интеграл стремится к нулю, когда $t \downarrow 0$, при любом фиксированном $T > 0$. Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{t \downarrow 0} \Phi(x, y, t) = \varphi(x, y)$ равномерно по (x, y) в R^2.

Теперь, учитывая бикомпактность носителя $\operatorname{supp}(\varphi)$ и вычисляя частные производные, мы с помощью формулы интегрирования по частям находим

$$\frac{\partial^{m+k}\Phi(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-2} \frac{\partial^{m+k}\varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^m \partial \eta^k} e^{-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]/4t}\, d\xi\, d\eta$$

$$\text{при} \quad t > 0$$

и

$$\frac{\partial^{m+k}\Phi(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}\varphi(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} \qquad \text{при} \quad t = 0.$$

Таким образом, мы, как и выше, получаем, что

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\partial^{m+k}\Phi(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}\varphi(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} \quad \text{равномерно по } (x, y). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что функция $\Phi(x, y, t)$, определенная формулой (2), может быть при $t > 0$ продолжена как голоморфная функция на комплексные значения x и y в области $|x| < \infty$, $|y| < \infty$. Поэтому для любого заданного $\gamma > 0$ функцию $\Phi(x, y, t)$ при фиксированном $t > 0$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} c_{s, m}(t)\, x^s y^{m-s},$$

который абсолютно и равномерно сходится в области $|x| \leqslant \gamma$, $|y| \leqslant \gamma$ и может быть почленно продифференцирован:

$$\frac{\partial^{m+k}\Phi(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^k} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_1} c_{s, m}(t) \frac{\partial^{m+k} x^s y^{m_1-s}}{\partial x^m \partial y^k}.$$

Выберем произвольную последовательность $\{t_i\}$ положительных чисел t_i, такую, что $t_i \downarrow 0$. Согласно доказанному выше, для каждого значения t_i мы можем взять такой полином $P_i(x, y)$, представляющий собой отрезок ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{s=0}^{m} c_{s, m}(t_i)\, x^s y^{m-s}$, что в топологии пространства $\mathfrak{E}(R^2)$

$$\lim_{i \to \infty} P_i(x, y) = \varphi(x, y),$$

т. е. на всяком бикомпактном подмножестве K пространства R^2 мы имеем $\lim\limits_{i\to\infty} D^s P_i(x, y) = D^s\varphi(x, y)$ равномерно на множестве K для любого дифференциального оператора D^s. Выберем теперь такие функции $\rho(x)\in C_0^\infty(R^1)$ и $\sigma(y)\in C_0^\infty(R^1)$, что $\rho(x)\sigma(y)=1$ на множестве $\operatorname{supp}(\varphi(x, y))$. Тогда, как нетрудно видеть, функции $\varphi_i(x, y)=\rho(x)\sigma(y)P_i(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Замечание. Совокупность всех функций, принадлежащих $\mathfrak{D}(R^{n+m})$, которые представимы в виде

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(x)\psi_j(y), \quad \text{где} \quad \varphi_j(x)\in\mathfrak{D}(R^n), \qquad \psi_j(y)\in\mathfrak{D}(R^m),$$

мы будем обозначать через $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$. Согласно доказанной выше теореме 1, множество $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$ плотно в $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^{n+m})$. Линейное подпространство $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$ пространства $\mathfrak{D}(R^{n+m})$, снабженное относительной топологией, называется *прямым произведением* пространств $\mathfrak{D}(R^n)$ и $\mathfrak{D}(R^m)$.

Теперь мы можем определить *прямое произведение* обобщенных функций. Для того чтобы явно указать независимые переменные $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функции $\varphi(x)\in\mathfrak{D}(R^n)$, мы будем обозначать пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ через $(\mathfrak{D}_x)$. Точно так же пространство $\mathfrak{D}(R^m)$, состоящее из функций $\psi(y)$ $(y=(y_1, y_2, \ldots, y_m))$, мы обозначим через $(\mathfrak{D}_y)$. Аналогично через $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ мы обозначим пространство $\mathfrak{D}(R^{n+m})$, состоящее из функций $\chi(x, y)$. Соответственно символом $T_{(x)}$ мы будем обозначать обобщенные функции $T\in\mathfrak{D}(R^n)'=(\mathfrak{D}_x)'$, чтобы подчеркнуть, что T применяется к функциям $\varphi(x)$ переменной x.

Теорема 2. Пусть $T_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$, $S_{(y)}\in(\mathfrak{D}_y)'$. Тогда можно единственным способом определить обобщенную функцию $W=W_{(x\times y)}\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$, такую, что

$$W(u(x)v(y))=T_{(x)}(u(x))S_{(y)}(v(y)) \quad \text{для} \quad u\in(\mathfrak{D}_x),\ v\in(\mathfrak{D}_y), \tag{4}$$

$$W(\varphi(x, y))=S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x, y)))= \\ =T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x, y))) \quad \text{для} \quad \varphi\in(\mathfrak{D}_{x\times y}) \tag{5}$$

(теорема Фубини).

Замечание. Обобщенная функция W называется *прямым произведением*, или *тензорным произведением*, обобщенных функций $T_{(x)}$ и $S_{(y)}$. Мы будем писать

$$W=T_{(x)}\times S_{(y)}=S_{(y)}\times T_{(x)}. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathfrak{B}=\{\varphi(x, y)\}$ — ограниченное множество пространства $(\mathfrak{D}_{x\times y})$. Для фиксированной точки $y^{(0)}$

множество $\{\varphi(x, y^{(0)}); \varphi \in \mathfrak{B}\}$ представляет собой ограниченное множество пространства $(\mathfrak{D}_x)$. Покажем, что

$$\{\psi(y^{(0)}); \psi(y^{(0)}) = T_{(x)}(\varphi(x, y^{(0)})), \ \varphi \in \mathfrak{B}\} \tag{7}$$

является ограниченным множеством пространства $\left(\mathfrak{D}_{y^{(0)}}\right)$. Доказательство проводится следующим образом.

Поскольку $\mathfrak{B}$ — ограниченное множество пространства $(\mathfrak{D}_{x \times y})$, существуют такие бикомпактные множества $K_x \in R^n$ и $K_y \in R^m$, что

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \left\{(x, y) \in R^{n+m}; \quad x \in K_x, \ y \in K_y\right\} \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{B}.$$

Отсюда следует, что $\varphi(x, y^{(0)}) = 0$ и $\psi(y^{(0)}) = T_{(x)}(\varphi(x, y^{(0)})) = 0$, так как $y^{(0)} \notin K_y$. Таким образом,

$$\operatorname{supp}(\psi) \subseteq K_y \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{B}. \tag{8}$$

Теперь мы должны убедиться в том, что для любого дифференциального оператора D_y, действующего в R^m, выполняется условие

$$\sup_{y, \psi} |D_y \psi(y)| < \infty \quad \text{при} \quad \psi(y) = T_{(x)}(\varphi(x, y)), \quad \varphi \in \mathfrak{B}. \tag{9}$$

Чтобы доказать это, возьмем, например, оператор $D_{y_1} = \partial/\partial y_1$. Тогда, поскольку $T_{(x)}$ — линейный функционал,

$$\frac{\psi(y_1 + h, y_2, \ldots, y_m) - \psi(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{h} = \\ = T_{(x)}\left\{\frac{\varphi(x, y_1 + h, y_2, \ldots, y_m) - \varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)}{h}\right\}.$$

Если φ пробегает множество $\mathfrak{B}$, то функции переменных x, стоящие в фигурных скобках при значениях параметра $y \in R^m$ и таких h, что $|h| \leqslant 1$, образуют в пространстве $(\mathfrak{D}_x)$ ограниченное множество. Это видно из того, что $\mathfrak{B}$ — ограниченное множество пространства $(\mathfrak{D}_{x \times y})$. Поэтому, полагая $h \to 0$ и применяя предложение 1 из § 8 гл. I, мы видим, что условие (9) действительно имеет место.

Итак, на основании того же предложения 1 мы можем заключить, что множество значений

$$\{S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x, y))); \ \varphi \in \mathfrak{B}\} \tag{10}$$

ограничено. Следовательно, упомянутое предложение 1 показывает, что равенство

$$W^{(1)}(\varphi) = S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x, y))) \tag{11}$$

определяет некоторую обобщенную функцию $W^{(1)} \in (\mathfrak{D}_{x \times y})'$. Аналогично соотношение

$$W^{(2)}(\varphi) = T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x, y))) \tag{12}$$

задает обобщенную функцию $W^{(2)} \in (\mathfrak{D}_{x \times y})'$. Ясно, что

$$W^{(1)}(u(x)v(y)) = W^{(2)}(u(x)v(y)) = T_{(x)}(u(x)) \cdot S_{(y)}(v(y)) \qquad (13)$$

для $u \in (\mathfrak{D}_x)$ и $v \in (\mathfrak{D}_y)$.

Поэтому из предыдущей теоремы 1, учитывая непрерывность обобщенных функций $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, мы заключаем, что $W^{(1)} = W^{(2)}$. Это и доказывает нашу теорему, так как можно положить $W = W^{(1)} = W^{(2)}$ [1]).

Литература к главе I

О локально выпуклых линейных топологических пространствах и банаховых пространствах см. Бурбаки [2], Гротендик [1], Кёте [1], Банах [1], Данфорд — Шварц [1], Хилле — Филлипс [1]. По поводу обобщенных функций см. Шварц Л. [1], Гельфанд — Шилов [1], Хёрмандер [6], Фридман [1] [2]).

[1]) Ясно, что условие (5) определяет W единственным образом. — *Прим. перев.*

[2]) О нормированных пространствах см. также Дэй [1*]. — *Прим. перев.*