ГЛАВА II

Приложения теоремы Бэра — Хаусдорфа

Свойство полноты B-пространств (и F-пространств) позволяет применить к ним теорему Бэра — Хаусдорфа (см. введение) и установить такие важные принципы функционального анализа, как *теорема о равномерной ограниченности*, *теорема о резонансе*, *теорема об открытости отображения и теорема о замкнутом графике*. Основные результаты, составляющие содержание этих теорем, принадлежат Банаху [1]. Свойство *почленной дифференцируемости последовательности обобщенных функций* следует из теоремы о равномерной ограниченности.

1. Теорема о равномерной ограниченности

Теорема 1 (о равномерной ограниченности). Пусть X — линейное топологическое пространство, непредставимое в виде объединения счетного числа своих замкнутых неплотных подмножеств. Предположим, что на X определено семейство непрерывных отображений $\{T_a;\ a \in A\}$ пространства X в квазинормированное линейное пространство Y. Пусть для всякого $a \in A$ и любых $x, y \in X$ выполняются неравенства

$$\|T_a(x+y)\| \leqslant \|T_a x\| + \|T_a y\| \quad \text{и} \quad \|T_a(\alpha x)\| = \|\alpha T_a x\| \quad \text{при} \quad \alpha \geqslant 0.$$

Если множество $\{T_a x;\ a \in A\}$ ограничено при всяком фиксированном $x \in X$, то $s\text{-}\lim\limits_{x \to 0} T_a x = 0$ равномерно относительно $a \in A$.

Доказательство. Для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ и всякого положительного целого n рассмотрим множество $X_n = \Big\{x \in X;\ \sup\limits_{a \in A} \{\|n^{-1}T_a x\| + \|n^{-1}T_a(-x)\|\} \leqslant \varepsilon\Big\}$. Ввиду непрерывности отображений T_a каждое из множеств X_n замкнуто. Из предположения, что множество $\{\|T_a x\|;\ a \in A\}$ ограничено, получаем $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Отсюда в силу предположений, сделанных относительно пространства X, следует, что какое-то из множеств X_n, скажем X_{n_0}, должно содержать окрестность вида $U = x_0 + V$ некоторой точки $x_0 \in X$, где V — такая окрестность нуля пространства X, что $V = -V$. При этом для точек

$x \in V$ справедливо неравенство $\sup\limits_{a \in A} \| n_0^{-1} T_a(x_0 + x) \| \leqslant \varepsilon$. Поэтому

$$\| T_a(n_0^{-1}x) \| = \| T_a(n_0^{-1}(x_0 + x - x_0)) \| \leqslant \| n_0^{-1} T_a(x_0 + x) \| + \\ + \| n_0^{-1} T_a(-x_0) \| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{при} \quad x \in V, \ a \in A.$$

Тем самым теорема доказана, так как операция αx умножения на скаляр в линейном топологическом пространстве непрерывна по обеим переменным α и x.

Следствие 1 (теорема о резонансе). Пусть $\{T_a;\ a \in A\}$ — семейство ограниченных линейных операторов, отображающих B-пространство X в нормированное линейное пространство Y. Тогда если множество $\{\|T_a x\|;\ a \in A\}$ ограничено при каждом фиксированном $x \in X$, то и множество $\{\|T_a\|;\ a \in A\}$ ограничено.

Доказательство. По теореме о равномерной ограниченности для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия $\|x\| \leqslant \delta$ вытекает неравенство $\sup\limits_{a \in A} \|T_a x\| \leqslant \varepsilon$. Поэтому $\sup\limits_{a \in A} \|T_a\| \leqslant \varepsilon/\delta$, что и доказывает наше утверждение.

Следствие 2. Пусть $\{T_n\}$ — последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих B-пространство X в нормированное линейное пространство Y. Предположим, что предел $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = Tx$ существует при каждом фиксированном $x \in X$. Тогда T — тоже ограниченный линейный оператор, отображающий X в Y, причем

$$\|T\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|T_n\|. \tag{1}$$

Доказательство. Ограниченность последовательности $\{\|T_n x\|\}$ при каждом фиксированном $x \in X$ вытекает из непрерывности нормы. Поэтому, согласно предыдущему следствию, $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|T_n\| < \infty$, откуда $\|T_n x\| \leqslant \sup\limits_{n \geqslant 1} \|T_n\| \cdot \|x\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Итак, еще раз используя непрерывность нормы, мы получаем

$$\|Tx\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n x\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|T_n\| \cdot \|x\|,$$

что и приводит к неравенству (1). Наконец, ясно, что T — линейный оператор.

Определение. Оператор T, полученный описанным выше способом, называется *сильным пределом* последовательности $\{T_n\}$ (говорят также, что последовательность $\{T_n\}$ *сильно сходится* к T). В этом случае мы будем писать $T = s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} T_n$.

Теперь мы докажем теорему о существовании для ограниченного линейного оператора ограниченного обратного оператора.

Теорема 2 (К. Нейман). Пусть T—ограниченный линейный оператор, отображающий B-пространство X в себя. Допустим, что $\|I-T\| < 1$, где I — тождественное отображение ($Ix \equiv x$). Тогда для T существует единственный обратный ограниченный линейный оператор T^{-1}, который выражается следующим *рядом К. Неймана*:

$$T^{-1}x = s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I+(I-T)+(I-T)^2+\ldots+(I-T)^n)\,x, \quad x \in X. \quad (2)$$

Доказательство. Для любого $x \in X$ справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{k}\|(I-T)^n x\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{k}\|(I-T)^n\|\cdot\|x\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|(I-T)\|^n\cdot\|x\|.$$

Ряд в правой части этого неравенства сходится, так как $\|I-T\| < 1$. Поэтому из полноты пространства X следует существование ограниченного линейного оператора, равного пределу $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{k}(I-T)^n$. Этот оператор является обратным для T, как следует из равенства

$$T\cdot s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x = s\text{-}\lim_{k\to\infty}(I-(I-T))\left(\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right) =$$
$$= x - s\text{-}\lim_{k\to\infty}(I-T)^{k+1}x = x$$

и аналогичного равенства $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(I-T)^n\right)Tx = x$.

2. Теорема Витали — Хана — Сакса

Эта теорема относится к сходящимся последовательностям мер. Она опирается на следующее

Предложение. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — некоторое пространство с мерой. Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ совокупность всех множеств $B \in \mathfrak{B}$, для которых $m(B) < \infty$. Всякие два множества B_1 и B_2 из $\mathfrak{B}$ условимся считать эквивалентными, если $m(B_1 \ominus B_2) = 0$; введем функцию расстояния

$$d(B_1, B_2) = m(B_1 \ominus B_2), \quad \text{где } B_1 \ominus B_2 = B_1 \cup B_2 - B_1 \cap B_2. \quad (1)$$

Множество $\mathfrak{B}_0$ (с метрикой (1)) образует метрическое пространство, которое мы обозначим через $(\mathfrak{B}_0)$. Элементами этого пространства служат классы $\overline{B}$ множеств $B_1 \in \mathfrak{B}_0$, таких, что $m(B \ominus B_1) = 0$. Пространство $(\mathfrak{B}_0)$ является полным метрическим пространством.