Теорема 2 (К. Нейман). Пусть T—ограниченный линейный оператор, отображающий B-пространство X в себя. Допустим, что $\|I-T\|<1$, где I — тождественное отображение ($Ix\equiv x$). Тогда для T существует единственный обратный ограниченный линейный оператор T^{-1}, который выражается следующим *рядом К. Неймана*:

$$T^{-1}x = s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I+(I-T)+(I-T)^2+\ldots+(I-T)^n)\,x, \quad x\in X. \tag{2}$$

Доказательство. Для любого $x\in X$ справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{k}\|(I-T)^n x\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{k}\|(I-T)^n\|\cdot\|x\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|(I-T)\|^n\cdot\|x\|.$$

Ряд в правой части этого неравенства сходится, так как $\|I-T\|<1$. Поэтому из полноты пространства X следует существование ограниченного линейного оператора, равного пределу $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{k}(I-T)^n$. Этот оператор является обратным для T, как следует из равенства

$$T\cdot s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x = s\text{-}\lim_{k\to\infty}(I-(I-T))\left(\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right) =$$
$$= x - s\text{-}\lim_{k\to\infty}(I-T)^{k+1}x = x$$

и аналогичного равенства $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(I-T)^n\right)Tx = x.$

2. *Теорема Витали — Хана — Сакса*

Эта теорема относится к сходящимся последовательностям мер. Она опирается на следующее

Предложение. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — некоторое пространство с мерой. Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ совокупность всех множеств $B\in\mathfrak{B}$, для которых $m(B)<\infty$. Всякие два множества B_1 и B_2 из $\mathfrak{B}$ условимся считать эквивалентными, если $m(B_1\ominus B_2)=0$; введем функцию расстояния

$$d(B_1, B_2) = m(B_1\ominus B_2), \quad \text{где } B_1\ominus B_2 = B_1\cup B_2 - B_1\cap B_2. \tag{1}$$

Множество $\mathfrak{B}_0$ (с метрикой (1)) образует метрическое пространство, которое мы обозначим через $(\mathfrak{B}_0)$. Элементами этого пространства служат классы $\overline{B}$ множеств $B_1\in\mathfrak{B}_0$, таких, что $m(B\ominus B_1)=0$. Пространство $(\mathfrak{B}_0)$ является полным метрическим пространством.

Доказательство. Обозначим через $C_B(s)$ характеристическую функцию множества B:

$$C_B(s) = 1 \quad \text{при} \quad s \in B, \quad C_B(s) = 0 \text{ при } \quad s \notin B.$$

Тогда

$$d(B_1, B_2) = \int_S |C_{B_1}(s) - C_{B_2}(s)|\, m(ds). \tag{2}$$

Таким образом, метрическое пространство $(\mathfrak{B}_0)$ можно отождествить с некоторым подмножеством B-пространства $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$. Допустим, что некоторая последовательность $\{C_{B_n}(s)\}$, где $B_n \in \mathfrak{B}_0$, удовлетворяет условию

$$\lim_{n,\, k \to \infty} d(B_n, B_k) = \lim_{n,\, k \to \infty} \int_S |C_{B_n}(s) - C_{B_k}(s)|\, m(ds) = 0.$$

Тогда так же, как при доказательстве полноты пространства $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, можно выбрать такую подпоследовательность $\{C_{B_{n'}}(s)\}$, что m-п. в. существует предел $\lim\limits_{n' \to \infty} C_{B_{n'}}(s) = C(s)$ и $\lim\limits_{n' \to \infty} \int_S |C(s) - C_{B_{n'}}(s)|\, m(ds) = 0$.

Очевидно, что $C(s)$ — это характеристическая функция некоторого множества $B_\infty \in \mathfrak{B}_0$, и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} d(B_\infty, B_n) = 0$.

Это и показывает, что пространство $(\mathfrak{B}_0)$ полно.

Теорема (Витали — Хан — Сакс). Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — некоторое пространство с мерой. Пусть $\{\lambda_n(B)\}$ — последовательность комплексных мер, таких, что их полные вариации $|\lambda_n|(S)$ конечны при $n = 1, 2, \ldots$. Допустим, что все меры $\lambda_n(B)$ m-абсолютно непрерывны и что для каждого множества $B \in \mathfrak{B}$ существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n(B) = \lambda(B)$. Тогда меры $\lambda_n(B)$ являются равностепенно (по n) m-абсолютно непрерывными, т. е. если $m(B) \to 0$, то $\lambda_n(B) \to 0$ равномерно по n. При условии $m(S) < \infty$ мера $\lambda(B)$ σ-аддитивна на $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Каждая мера λ_n порождает на пространстве $(\mathfrak{B}_0)$ однозначную функцию $\overline{\lambda}_n(\overline{B}) = \lambda_n(B)$; однозначность вытекает из m-абсолютной непрерывности меры $\lambda_n(B)$, в силу которой значение $\lambda_n(B)$ не зависит от выбора множества B из класса $\overline{B}$. Непрерывность функций $\overline{\lambda}_n(\overline{B})$ эквивалентна m-абсолютной непрерывности меры $\lambda_n(B)$, т. е. каждое из этих свойств влечет за собой другое.

Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ множества

$$F_k(\varepsilon) = \left\{ \overline{B};\quad \sup_{n \geqslant 1} |\overline{\lambda}_k(\overline{B}) - \overline{\lambda}_{k+n}(\overline{B})| \leqslant \varepsilon \right\}$$

замкнуты в $(\mathfrak{B}_0)$, и в силу предположения $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(B)=\lambda(B)$ мы имеем $(\mathfrak{B}_0)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k(\varepsilon)$. Так как полное метрическое пространство $(\mathfrak{B}_0)$ есть множество второй категории, по крайней мере одно множество $F_{k_0}(\varepsilon)$ содержит непустое открытое множество, принадлежащее $(\mathfrak{B}_0)$. Это означает, что существуют такой класс $\bar{B}_0\in(\mathfrak{B}_0)$ и такое число $\eta>0$, что из неравенства $d(B, B_0)\leqslant\eta$ следует неравенство

$$\sup_{n\geqslant 1}|\bar{\lambda}_{k_0}(\bar{B})-\bar{\lambda}_{k_0+n}(\bar{B})|\leqslant\varepsilon.$$

С другой стороны, любое множество $B\in\mathfrak{B}_0$, для которого $m(B)\leqslant\eta$, может быть представлено в виде $B=B_1-B_2$, где $d(B_1, B_0)\leqslant\eta$, $d(B_2, B_0)\leqslant\eta$. Например, можно положить $B_1=B\cup B_0$, $B_2=B_0-B\cap B_0$. Таким образом, если $m(B)\leqslant\eta$ и $k\geqslant k_0$, то

$$|\lambda_k(B)|\leqslant|\lambda_{k_0}(B)|+|\lambda_{k_0}(B)-\lambda_k(B)|\leqslant|\lambda_{k_0}(B)|+ \\ +|\lambda_{k_0}(B_1)-\lambda_k(B_1)|+|\lambda_{k_0}(B_2)-\lambda_k(B_2)|\leqslant|\lambda_{k_0}(B)|+2\varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности $\varepsilon>0$ и m-абсолютной непрерывности λ_{k_0}, мы заключаем, что если $m(B)\to 0$, то $\lambda_n(B)\to 0$ равномерно по n. Это означает, что и $\lambda(B)\to 0$ при $m(B)\to 0$. С другой стороны, ясно, что функция λ обладает свойством *конечной аддитивности*, т. е. $\lambda\left(\sum\limits_{j=1}^{n}B_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda(B_j)$. Отсюда и из доказанного равенства $\lim\limits_{m(B)\to 0}\lambda(B)=0$ вытекает, что функция λ также и σ-аддитивна, если $m(S)<\infty$.

Следствие 1. Пусть $\{\lambda_n(B)\}$ — последовательность комплексных мер на S, таких, что их полные вариации $|\lambda_n|(S)$ конечны при каждом n. Если для каждого $B\in\mathfrak{B}$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(B)$, то функции $\{\lambda_n(B)\}$ оказываются σ-аддитивными равномерно относительно n, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_n(B_k)=0$ равномерно по n для всякой убывающей последовательности $\{B_k\}$ множеств $B_k\in\mathfrak{B}$, такой, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}B_k=\emptyset$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$m(B)=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\mu_j(B),\quad \text{где}\quad \mu_j(B)=\lambda_j(B)/|\lambda_j|(S).$$

Она σ-аддитивна, так как λ_j обладают этим свойством, и, кроме того, $0\leqslant m(B)\leqslant 1$. Каждая из функций λ_j и μ_j m-абсолютно непрерывна. Следовательно, по доказанной выше теореме $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_n(B_k)=0$ равномерно по n, так как $\lim\limits_{k\to\infty} m(B_k)=0$.

Следствие 2. Функция $\lambda(B)$, фигурирующая в доказанной выше теореме, является σ-аддитивной и m-абсолютно непрерывной и в том случае, когда $m(S)=\infty$.

3. Почленная дифференцируемость последовательности обобщенных функций

Исследование сходимости последовательностей обобщенных функций проводится очень просто. Это показывает следующая

Теорема. Пусть $\{T_n\}$ — последовательность обобщенных функций $T_n \in \mathfrak{D}(\Omega)'$. Пусть для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\varphi)=T(\varphi)$. Тогда T — тоже обобщенная функция, принадлежащая $\mathfrak{D}(\Omega)'$. В этом случае мы будем называть T пределом последовательности $\{T_n\}$ в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)'$ и писать $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$.

Доказательство. Линейность функционала T очевидна. Пусть K — любое бикомпактное подмножество области Ω. Тогда каждая обобщенная функция T_n определяет некоторый линейный функционал на F-пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Кроме того, эти функционалы непрерывны. В самом деле, используя предложение 1 из § 8 гл. I, нетрудно показать, что они ограничены на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Поэтому, согласно теореме о равномерной ограниченности, линейный функционал T ограничен на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Таким образом, T оказывается непрерывным линейным функционалом на любом пространстве вида $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Так как $\mathfrak{D}(\Omega)$ — индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, функционал T должен быть непрерывным линейным функционалом и на пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Следствие (теорема о почленной дифференцируемости). Пусть $T=\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$. Тогда для любого дифференциального оператора D^j справедливо соотношение $D^jT=\lim\limits_{n\to\infty} D^jT_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T\ (\mathfrak{D}(\Omega)')$, то

$$\lim_{n\to\infty} T_n\left((-1)^{|j|} D^j\varphi\right)=T\left((-1)^{|j|} D^j\varphi\right)$$

для всякой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Поэтому

$$(D^jT)(\varphi)=\lim_{n\to\infty} (D^jT_n)(\varphi) \quad \text{для любой функции} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$