непрерывна. Следовательно, по доказанной выше теореме $\lim_{k\to\infty} \lambda_n(B_k)=0$ равномерно по n, так как $\lim_{k\to\infty} m(B_k)=0$.

Следствие 2. Функция $\lambda(B)$, фигурирующая в доказанной выше теореме, является σ-аддитивной и m-абсолютно непрерывной и в том случае, когда $m(S)=\infty$.

3. Почленная дифференцируемость последовательности обобщенных функций

Исследование сходимости последовательностей обобщенных функций проводится очень просто. Это показывает следующая

Теорема. Пусть $\{T_n\}$ — последовательность обобщенных функций $T_n \in \mathfrak{D}(\Omega)'$. Пусть для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi)=T(\varphi)$. Тогда T — тоже обобщенная функция, принадлежащая $\mathfrak{D}(\Omega)'$. В этом случае мы будем называть T пределом последовательности $\{T_n\}$ в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)'$ и писать $T = \lim_{n\to\infty} T_n (\mathfrak{D}(\Omega)')$.

Доказательство. Линейность функционала T очевидна. Пусть K — любое бикомпактное подмножество области Ω. Тогда каждая обобщенная функция T_n определяет некоторый линейный функционал на F-пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Кроме того, эти функционалы непрерывны. В самом деле, используя предложение 1 из § 8 гл. I, нетрудно показать, что они ограничены на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Поэтому, согласно теореме о равномерной ограниченности, линейный функционал T ограничен на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Таким образом, T оказывается непрерывным линейным функционалом на любом пространстве вида $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Так как $\mathfrak{D}(\Omega)$ — индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, функционал T должен быть непрерывным линейным функционалом и на пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Следствие (теорема о почленной дифференцируемости). Пусть $T=\lim_{n\to\infty} T_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$. Тогда для любого дифференциального оператора D^j справедливо соотношение $D^jT=\lim_{n\to\infty} D^jT_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$.

Доказательство. Так как $\lim_{n\to\infty} T_n=T\ (\mathfrak{D}(\Omega)')$, то

$$\lim_{n\to\infty} T_n\left((-1)^{|j|} D^j\varphi\right)=T\left((-1)^{|j|} D^j\varphi\right)$$

для всякой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Поэтому

$$(D^jT)(\varphi)=\lim_{n\to\infty} (D^jT_n)(\varphi) \quad \text{для любой функции} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$