4. Теорема о сгущении особенностей

Теорему Бэра — Хаусдорфа можно применить для доказательства существования функций с различными особенностями. Например, можно доказать существование непрерывной функции, не имеющей ни в одной точке конечной производной.

Теорема Вейерштрасса. На отрезке $[0, 1]$ существует непрерывная вещественная функция $x(t)$, которая ни в одной точке t_0 отрезка $[0, 1/2]$ не имеет конечной производной $x'(t_0)$.

Доказательство. Функция $x(t)$ обладает в точке $t = t_0$ конечными правыми верхним и нижним производными числами в том и только в том случае, когда существует такое положительное целое n, что

$$\sup_{2^{-1} > h > 0} h^{-1} |x(t_0 + h) - x(t_0)| \leqslant n.$$

Обозначим через M_n совокупность всех функций $x(t) \in C[0, 1]$, удовлетворяющих написанному выше условию в некоторой точке t_0 отрезка $[0, 1/2]$; различным функциям $x(t)$ могут соответствовать разные точки t_0 отрезка $[0, 1/2]$. Теперь достаточно показать, что всякое множество типа M_n неплотно в $C[0, 1]$. Действительно, если это так, то множество $C[0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ непусто, поскольку, согласно теореме Бэра — Хаусдорфа, полное метрическое пространство $C[0, 1]$ не может быть множеством первой категории.

Легко видеть, что из определения нормы пространства $C[0, 1]$ и бикомпактности отрезка $[0, 1/2]$ следует замкнутость множеств M_n в $C[0, 1]$. Далее для всякого полинома $z(t)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ мы можем найти функцию $y(t) \in C[0, 1] - M_n$, для которой $\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |z(t) - y(t)| = \|z - y\| \leqslant \varepsilon$. Можно, например, выбрать в качестве $y(t)$ непрерывную функцию, график которой представляет собой ломаную линию. Следовательно, согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами, множества M_n неплотны в $C[0, 1]$.

Приведенная ниже *теорема о сгущении особенностей*, установленная Банахом [1] и Штейнгаузом, опирается на следующее утверждение.

Теорема (Банах). Рассмотрим некоторую последовательность ограниченных линейных операторов $\{T_n\}$, отображающих B-пространство X в нормированные линейные пространства Y_n. Тогда множество

$$B = \left\{ x \in X;\ \overline{\lim_{n \to \infty}} \|T_n x\| < \infty \right\}$$

либо совпадает с X, либо является в пространстве X множеством первой категории.

Доказательство. Покажем, что если B является множеством второй категории, то $B = X$. По определению множества B для всякого $x \in B$ справедливо соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant 1} \| k^{-1}T_n x \| = 0$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$

$$B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad \text{где} \quad B_k = \left\{ x \in X;\ \sup_{n\geqslant 1} \| k^{-1}T_n x \| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Ввиду непрерывности операторов T_n каждое множество B_k замкнуто. Поэтому если B — множество второй категории, то одно из множеств B_k, скажем B_{k_0}, содержит некоторый шар положительного радиуса. Иными словами, существуют точка $x_0 \in X$ и число $\delta > 0$, такие, что $\sup\limits_{n\geqslant 1} \| k_0^{-1} T_n x \| \leqslant \varepsilon$ при $\| x - x_0 \| \leqslant \delta$. Следовательно, полагая $x - x_0 = y$, мы при условии $\| y \| \leqslant \delta$ получаем неравенство $\| k_0^{-1} T_n y \| \leqslant \| k_0^{-1} T_n x \| + \| k_0^{-1} T_n x_0 \| \leqslant 2\varepsilon$. Таким образом,

$$\sup_{n\geqslant 1,\ \| z \| \leqslant k_0^{-1}\delta} \| T_n z \| \leqslant 2\varepsilon,$$

и поэтому $B = X$.

Следствие (теорема о сгущении особенностей). Пусть $\{T_{p,q}\}$ $(q = 1, 2, \ldots)$ — последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих B-пространство X в нормированное линейное пространство Y_p $(p = 1, 2, \ldots)$. Допустим, что для каждого p существует такая точка $x_p \in X$, что $\overline{\lim\limits_{q\to\infty}} \| T_{p,q} x_p \| = \infty$. Тогда множество

$$B = \left\{ x \in X;\quad \overline{\lim_{q\to\infty}} \| T_{p,q} x \| = \infty \quad \text{для всех} \quad p = 1, 2, \ldots \right\}$$

является множеством второй категории.

Доказательство. При каждом фиксированном p множество $B_p = \left\{ x \in X;\ \overline{\lim\limits_{q\to\infty}} \| T_{p,q} x \| < \infty \right\}$ является множеством первой категории — это вытекает из сделанных предположений и предыдущей теоремы. Поэтому $B = X - \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} B_p$ должно быть множеством второй категории.

На этом результате основывается общий метод построения функций с разного рода особенностями.

Пример. Существует вещественная непрерывная функция $x(t)$ периода 2π, такая, что *частичная сумма* ее *ряда Фурье*

$$f_q(x;\ t) = \sum_{k=0}^{q} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) K_q(s,\ t)\, ds, \qquad (1)$$

где $K_q(s, t) = \sin\left((q+2^{-1})(s-t)\right)/2\sin 2^{-1}(s-t)$, удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\, |f_q(x;\ t)| = \infty \text{ на множестве } P \subseteq [0,\ 2\pi] \text{ мощности континуума.} \quad (2)$$

Более того, множество P можно выбрать так, чтобы оно содержало любую счетную последовательность $\{t_j\} \subseteq [0,\ 2\pi]$.

Доказательство. Множество всех вещественных непрерывных функций $x(t)$ периода 2π с нормой $\|x\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |x(t)|$ образует вещественное B-пространство, которое мы обозначим $C_{2\pi}$. Из (1) следует, что при всяком заданном значении $t_0 \in [0,\ 2\pi]$ функцию $f_q(x;\ t)$ можно рассматривать как ограниченный линейный функционал на $C_{2\pi}$. Кроме того, норма этого функционала $f_q(x;\ t_0)$ равна величине

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_q(s,\ t_0)|\,ds \text{ — полной вариации функции } \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{t} K_q(s,\ t_0)\,dt. \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что выражение (3) стремится к ∞ при $q\to\infty$ для всякой фиксированной точки t_0.

Поэтому если мы возьмем произвольную счетную плотную последовательность $\{t_j\} \subseteq [0,\ 2\pi]$, то, согласно предыдущему следствию, множество

$$B = \left\{ x \in C_{2\pi};\ \overline{\lim_{q\to\infty}}\, |f_q(x;\ t)| = \infty \quad \text{для} \quad t = t_1,\ t_2,\ \dots \right\}$$

будет множеством второй категории. Отсюда следует, что множество B непусто, так как пространство $C_{2\pi}$ полно. Покажем, что для любой функции $x \in B$ множество

$$P = \left\{ t \in [0,\ 2\pi];\ \overline{\lim_{q\to\infty}}\, |f_q(x;\ t)| = \infty \right\}$$

имеет мощность континуума. С этой целью положим

$$F_{m,q} = \{t \in [0,\ 2\pi];\ |f_q(x;\ t)| \leqslant m\}, \qquad F_m = \bigcap_{q=1}^{\infty} F_{m,q}.$$

Так как функция $x(t)$ и тригонометрические функции непрерывны, множества $F_{m,q}$, а следовательно, и F_m замкнуты в отрезке $[0,\ 2\pi]$. Если мы сможем показать, что $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$ — множество первой категории в отрезке $[0,\ 2\pi]$, то отсюда будет следовать, что $P = \left([0,\ 2\pi] - \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m\right) \ni \{t_j\}$ является множеством второй категории. Действительно, в этом случае P не может быть счетным множеством, а поэтому, согласно известной *гипотезе континуума*, должно иметь мощность континуума.

Таким образом, для завершения доказательства мы должны убедиться в том, что каждое F_m является множеством первой категории в $[0, 2\pi]$. Допустим, что некоторое F_{m_0} представляет собой множество второй категории. Будучи замкнутым множеством в $[0, 2\pi]$, F_{m_0} должно содержать некоторый замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$ отрезка $[0, 2\pi]$. Но тогда $\sup\limits_{q \geqslant 1} |f_q(x; t)| \leqslant m_0$ для всех значений $t \in [\alpha, \beta]$, а это противоречит тому факту, что множество P содержит плотное подмножество $\{t_j\}$ отрезка $[0, 2\pi]$.

Замечание. Тот факт, что множество P имеет мощность континуума, можно доказать и не прибегая к гипотезе континуума; см., например, Хаусдорф [1].

5. Теорема об открытости отображения

Теорема (теорема Банаха об открытости отображения). Пусть T — непрерывный линейный оператор, отображающий F-пространство X на F-пространство Y. Тогда T отображает каждое открытое множество пространства X на открытое множество пространства Y.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее

Предложение. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Рассмотрим непрерывный линейный оператор T, отображающий X в Y. Предположим, что область значений $R(T)$ оператора T является множеством второй категории в Y. Тогда каждой окрестности U нуля пространства X соответствует некоторая окрестность V нуля пространства Y, такая, что $V \subseteq (TU)^a$.

Доказательство. Пусть W — такая окрестность нуля пространства X, что $W = -W$ и $W + W \subseteq U$. Для любого $x \in X$ имеем $x/n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $x \in nW$ для достаточно больших значений n. Следовательно, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (nW)$ и $R(T) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(nW)$. Поскольку $R(T)$ — множество второй категории в Y, существует такое целое положительное n_0, что множество $(T(n_0W))^a$ содержит некоторое непустое открытое множество. Так как $(T(nW))^a = n(T(W))^a$, а множества $n(T(W))^a$ и $(T(W))^a$ гомеоморфны, то множество $(T(W))^a$ тоже содержит некоторое непустое открытое множество. Пусть $y_0 = Tx_0$, где $x_0 \in W$ — точка этого открытого множества. Тогда, поскольку отображение $x \to -x_0 + x$ является гомеоморфизмом, существует такая окрестность V нуля пространства Y, что $V \subseteq -y_0 + (T(W))^a$. Элементы множества $-y_0 + T(W)$ представляются в виде $-y_0 + Tw = T(w - x_0)$, где $w \in W$. Но $w - x_0 \in W + W \subseteq U$, так как $W = -W$ и $W + W \subseteq U$.

Поэтому $-y_0 + T(W) \subseteq T(U)$, и, следовательно, переходя к замыканиям, мы получаем $-y_0 + (T(W))^a \subseteq (T(U))^a$, откуда $V \subseteq -y_0 + (T(W))^a \subseteq (T(U))^a = (TU)^a$.