Таким образом, для завершения доказательства мы должны убедиться в том, что каждое F_m является множеством первой категории в $[0, 2\pi]$. Допустим, что некоторое F_{m_0} представляет собой множество второй категории. Будучи замкнутым множеством в $[0, 2\pi]$, F_{m_0} должно содержать некоторый замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$ отрезка $[0, 2\pi]$. Но тогда $\sup\limits_{q \geqslant 1} |f_q(x; t)| \leqslant m_0$ для всех значений $t \in [\alpha, \beta]$, а это противоречит тому факту, что множество P содержит плотное подмножество $\{t_j\}$ отрезка $[0, 2\pi]$.

Замечание. Тот факт, что множество P имеет мощность континуума, можно доказать и не прибегая к гипотезе континуума; см., например, Хаусдорф [1].

5. Теорема об открытости отображения

Теорема (теорема Банаха об открытости отображения). Пусть T — непрерывный линейный оператор, отображающий F-пространство X на F-пространство Y. Тогда T отображает каждое открытое множество пространства X на открытое множество пространства Y.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее

Предложение. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Рассмотрим непрерывный линейный оператор T, отображающий X в Y. Предположим, что область значений $R(T)$ оператора T является множеством второй категории в Y. Тогда каждой окрестности U нуля пространства X соответствует некоторая окрестность V нуля пространства Y, такая, что $V \subseteq (TU)^a$.

Доказательство. Пусть W — такая окрестность нуля пространства X, что $W = -W$ и $W + W \subseteq U$. Для любого $x \in X$ имеем $x/n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $x \in nW$ для достаточно больших значений n. Следовательно, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(nW)$ и $R(T) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(nW)$. Поскольку $R(T)$ — множество второй категории в Y, существует такое целое положительное n_0, что множество $(T(n_0W))^a$ содержит некоторое непустое открытое множество. Так как $(T(nW))^a = n(T(W))^a$, а множества $n(T(W))^a$ и $(T(W))^a$ гомеоморфны, то множество $(T(W))^a$ тоже содержит некоторое непустое открытое множество. Пусть $y_0 = Tx_0$, где $x_0 \in W$ — точка этого открытого множества. Тогда, поскольку отображение $x \to -x_0 + x$ является гомеоморфизмом, существует такая окрестность V нуля пространства Y, что $V \subseteq -y_0 + (T(W))^a$. Элементы множества $-y_0 + T(W)$ представляются в виде $-y_0 + Tw = T(w - x_0)$, где $w \in W$. Но $w - x_0 \in W + W \subseteq U$, так как $W = -W$ и $W + W \subseteq U$.

Поэтому $-y_0 + T(W) \subseteq T(U)$, и, следовательно, переходя к замыканиям, мы получаем $-y_0 + (T(W))^a \subseteq (T(U))^a$, откуда $V \subseteq -y_0 + (T(W))^a \subseteq (T(U))^a = (TU)^a$.

Доказательство теоремы. Будучи полным метрическим пространством, Y представляет собой множество второй категории. Поэтому, согласно доказанному выше предложению, замыкание образа при отображении T всякой окрестности нуля пространства X содержит некоторую окрестность нуля пространства Y.

Обозначим через X_ε, Y_ε шары соответственно в пространствах X, Y с центром в начале координат и радиусами $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_i = \varepsilon/2^i \ (i = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда, как было показано выше, существует такая последовательность положительных чисел $\{\eta_i\}$, что

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0 \quad \text{и} \quad Y_{\eta_i} \subseteq (TX_{\varepsilon_i})^a \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Выберем произвольную точку $y \in Y_{\eta_0}$. Мы покажем, что существует такая точка $x \in X_{2\varepsilon_0}$, что $Tx = y$. Из условия (1) при $i = 0$ следует существование такой точки $x_0 \in X_{\varepsilon_0}$, что $\|y - Tx_0\| < \eta_1$. Так как $(y - Tx_0) \in Y_{\eta_1}$, то снова из условия (1) при $i = 1$ мы заключаем, что существует точка $x_1 \in X_{\varepsilon_1}$, для которой $\|y - Tx_0 - Tx_1\| < \eta_2$. Повторяя этот процесс, мы придем к такой последовательности $\{x_i\}$ элементов $x_i \in X_{\varepsilon_i}$, что

$$\left\| y - T\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\right\| < \eta_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из неравенств $\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \leqslant \left(\sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k}\right)\varepsilon_0$ вытекает, что последовательность $\left\{\sum_{k=0}^{n} x_k\right\}$ фундаментальна. Поэтому существует $s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = x \in X$, так как пространство X полно. Кроме того,

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=0}^{n} x_k\right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right)\varepsilon_0 = 2\varepsilon_0.$$

Оператор T непрерывен, поэтому $y = Tx$. Тем самым мы показали, что всякий шар вида $X_{2\varepsilon_0}$ отображается оператором T на некоторое множество, содержащее шар Y_{η_0}.

Пусть теперь G — непустое открытое множество в X и $x \in G$. Пусть U — такая окрестность нуля пространства X, что $x + U \subseteq G$. Через V обозначим окрестность нуля пространства Y, удовлетворяющую условию $TU \supseteq V$. Тогда $TG \supseteq T(x + U) = Tx + TU \supseteq Tx + V$. Следовательно, множество TG содержит окрестность каждой своей точки. Это показывает, что оператор T отображает открытые множества пространства X на открытые множества пространства Y.

Следствие. Если непрерывный линейный оператор T взаимно однозначно отображает одно F-пространство на другое F-пространство, то обратный оператор T^{-1} тоже непрерывен.

6. Теорема о замкнутом графике

Определение 1. Пусть X и Y — линейные топологические пространства над одним и тем же скалярным полем. Тогда произведение $X \times Y$ с операциями

$$\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}, \qquad \alpha\{x, y\} = \{\alpha x, \alpha y\}$$

представляет собой линейное пространство. Если определить открытые множества в этом пространстве как множества вида

$$G_1 \times G_2 = \{\{x, y\};\ x \in G_1,\ y \in G_2\},$$

где G_1, G_2 — открытые множества соответственно в X, Y, то $X \times Y$ будет линейным топологическим пространством. Если, кроме того, X и Y — квазинормированные линейные пространства, то $X \times Y$ с квазинормой

$$\|\{x, y\}\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}, \tag{1}$$

является квазинормированным пространством.

Предложение 1. Если X и Y — два B-пространства (F-пространства), то $X \times Y$ также является B-пространством (F-пространством).

Доказательство. Утверждение вытекает из эквивалентности соотношения $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n, y_n\} = \{x, y\}$ и равенств $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Определение 2. *Графиком* $G(T)$ линейного оператора T, действующего из $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, называется множество $\{\{x, Tx\},\ x \in D(T)\}$ пространства $X \times Y$. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Оператор T называется *замкнутым линейным оператором*, если его график $G(T)$ образует замкнутое линейное подпространство пространства $X \times Y$. Если X и Y — квазинормированные линейные пространства, то линейный оператор T, действующий из $D(T) \subseteq X$ в Y, замкнут тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\text{если } \{x_n\} \subseteq D(T), \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ и } s\text{-}\lim_{n\to\infty} Tx_n = y,$$
$$\text{то } \ x \in D(T) \text{ и } Tx = y. \tag{2}$$

Таким образом, понятие замкнутого линейного оператора является обобщением понятия ограниченного линейного оператора. Говорят,