Следствие. Если непрерывный линейный оператор T взаимно однозначно отображает одно F-пространство на другое F-пространство, то обратный оператор T^{-1} тоже непрерывен.

6. Теорема о замкнутом графике

Определение 1. Пусть X и Y — линейные топологические пространства над одним и тем же скалярным полем. Тогда произведение $X \times Y$ с операциями

$$\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}, \qquad \alpha\{x, y\} = \{\alpha x, \alpha y\}$$

представляет собой линейное пространство. Если определить открытые множества в этом пространстве как множества вида

$$G_1 \times G_2 = \{\{x, y\};\ x \in G_1,\ y \in G_2\},$$

где G_1, G_2 — открытые множества соответственно в X, Y, то $X \times Y$ будет линейным топологическим пространством. Если, кроме того, X и Y — квазинормированные линейные пространства, то $X \times Y$ с квазинормой

$$\|\{x, y\}\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}, \tag{1}$$

является квазинормированным пространством.

Предложение 1. Если X и Y — два B-пространства (F-пространства), то $X \times Y$ также является B-пространством (F-пространством).

Доказательство. Утверждение вытекает из эквивалентности соотношения $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n, y_n\} = \{x, y\}$ и равенств $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Определение 2. *Графиком* $G(T)$ линейного оператора T, действующего из $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, называется множество $\{\{x, Tx\}, x \in D(T)\}$ пространства $X \times Y$. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Оператор T называется *замкнутым линейным оператором*, если его график $G(T)$ образует замкнутое линейное подпространство пространства $X \times Y$. Если X и Y — квазинормированные линейные пространства, то линейный оператор T, действующий из $D(T) \subseteq X$ в Y, замкнут тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\text{если } \{x_n\} \subseteq D(T), \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ и } s\text{-}\lim_{n\to\infty} Tx_n = y,$$
$$\text{то} \quad x \in D(T) \text{ и } Tx = y. \tag{2}$$

Таким образом, понятие замкнутого линейного оператора является обобщением понятия ограниченного линейного оператора. Говорят, что линейный оператор T, отображающий множество $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, *допускает замкнутое расширение*, если замыкание графика $G(T)$ в $X \times Y$ представляет собой график некоторого линейного оператора, скажем S, отображающего некоторую область $D(S) \subseteq X$ в Y.

Предложение 2. Если X, Y — квазинормированные линейные пространства, то оператор T допускает замкнутое расширение тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\text{если} \quad \{x_n\} \subseteq D(T), \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{и} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} Tx_n = y, \quad \text{то} \quad y = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость условия (3) очевидна, так как если замыкание графика $G(T)$ в пространстве $X \times Y$ служит графиком $G(S)$ некоторого линейного оператора S, то $y = S \cdot 0 = 0$. Докажем его достаточность. Определим линейный оператор S следующим образом:

$x \in D(S)$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{x_n\} \subseteq D(T)$, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и существует $s\text{-}\lim Tx_n = y$; положим $Sx = y$ (4)

и назовем его *наименьшим замкнутым расширением оператора* T. Из условия (3) следует, что y однозначно определяется по x. Остается лишь доказать, что оператор S замкнут. Пусть $w_n \in D(S)$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Sw_n = u$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subseteq D(T)$, такая, что $\|w_n - x_n\| \leqslant n^{-1}$, $\|Sw_n - Tx_n\| \leqslant n^{-1}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Отсюда $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} w_n$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Sw_n = u$, и поэтому $w \in D(S)$, $Sw = u$.

Пример замкнутого оператора, не являющегося непрерывным. Положим $X = Y = C[0, 1]$. Обозначим через D множество всех функций $x(t) \in X$, для которых $x'(t) \in X$. Определим оператор T на $D(T) = D$ равенством $Tx = x'$. Оператор T не является непрерывным, потому что, например, для функций $x_n(t) = t^n$

$$\|x_n\| = 1, \quad \|Tx_n\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_n'(t)| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |nt^{n-1}| = n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Однако этот оператор замкнут. В самом деле, пусть $\{x_n\} \subseteq D(T)$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$. Тогда $x_n'(t)$ равномерно сходится к $y(t)$, а $x_n(t)$ равномерно сходится к $x(t)$ при $n \to \infty$. Следовательно, функция $x(t)$ имеет непрерывную производную $y(t)$. Отсюда вытекает, что $x \in D(T)$ и $Tx = y$.

Примеры операторов, допускающих замкнутые расширения. Обозначим через D_x линейный дифференциальный оператор

$$D_x = \sum_{|j| \leqslant k} c_j(x) D^j \tag{5}$$

с коэффициентами $c_j(x) \in C^k(\Omega)$, где Ω — открытое множество пространства R^n. Рассмотрим множество D всех функций $f(x) \in \in L^2(\Omega) \cap C^k(\Omega)$, для которых $D_x f(x) \in L^2(\Omega)$. Определим линейный оператор T, отображающий область $D(T) = D \subseteq L^2(\Omega)$ в пространство $L^2(\Omega)$, формулой $(Tf)(x) = D_x f(x)$. Этот оператор T допускает замкнутое расширение. Действительно, пусть $\{f_h\} \subseteq D$ такая последовательность, что $s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} f_h = 0$, $s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} D_x f_h = g$. Для любой функции $\varphi(x) \in C_0^k(\Omega)$ с помощью интегрирования по частям можно вывести равенство

$$\int_\Omega D_x f(x) \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x) \cdot D'_x \varphi(x)\, dx, \tag{6}$$

где D'_x — дифференциальный оператор, *формально сопряженный* к D_x:

$$D'_x \varphi(x) = \sum_{|j| \leqslant k} (-1)^{|j|} D^j (c_j(x) \varphi(x)). \tag{7}$$

Формула (6) следует из того, что проинтегрированный член, возникающий при интегрировании по частям, обращается в нуль, так как $\varphi(x) \in C_0^k(\Omega)$. Поэтому в силу непрерывности скалярного произведения в пространстве $L^2(\Omega)$ мы, полагая в формуле (6) $f = f_h$ и переходя к пределу при $h \to \infty$, получаем равенство

$$\int_\Omega g(x) \varphi(x)\, dx = \int_\Omega 0 \cdot D'_x \varphi(x)\, dx = 0. \tag{8}$$

Так как функция $\varphi(x) \in C_0^k(\Omega)$ выбиралась произвольно, то $g(x) = 0$ почти всюду, т. е. $g = 0$ как элемент пространства $L^2(\Omega)$.

Предложение 3. Обратный оператор T^{-1} замкнутого линейного оператора из $D(T) \subseteq X$ в Y, если он существует, является замкнутым линейным оператором.

Доказательство. Графиком оператора T^{-1} служит множество $\{\{Tx, x\};\ x \in D(T)\}$, принадлежащее пространству $Y \times X$. Поэтому утверждение следует из того, что отображение $\{x, y\} \to \{y, x\}$ пространства $X \times Y$ на $Y \times X$ является гомеоморфизмом.

Теперь мы докажем *теорему Банаха о замкнутом графике*.

Теорема 1. Всякий замкнутый линейный оператор T, отображающий F-пространство X в F-пространство Y, непрерывен.

Доказательство. График $G(T)$ оператора T представляет собой замкнутое линейное подпространство F-пространства $X \times Y$. Так как пространство $X \times Y$ полно, множество $G(T)$ является F-пространством. Соотношение $U\{x, Tx\} = x$ определяет взаимно однозначное непрерывное линейное отображение U F-пространства $G(T)$ на F-пространство X. Следовательно, по теореме об открытости отображения обратное к U отображение U^{-1} непрерывно. Равенство $V\{x, Tx\} = Tx$ определяет в свою очередь линейное непрерывное отображение V пространства $G(T)$ на множество $R(T) \subseteq Y$. Итак, оператор $T = VU^{-1}$, отображающий пространство X в Y, непрерывен.

Следующая теорема о сравнении двух линейных операторов принадлежит Хёрмандеру.

Теорема 2. Рассмотрим B-пространства X_i $(i = 0, 1, 2; X_0 = X)$ и линейные операторы T_i $(i = 1, 2)$, отображающие области $D(T_i) \subseteq X$ в пространства X_i. Тогда если оператор T_1 замкнут, а оператор T_2 допускает замкнутое расширение, причем $D(T_1) \subseteq D(T_2)$, то существует такая постоянная C, что

$$\| T_2 x \| \leqslant C (\| T_1 x \|^2 + \| x \|^2)^{1/2} \quad \text{для всех } x \in D(T_1). \tag{9}$$

Доказательство. График $G(T_1)$ оператора T_1 представляет собой замкнутое подпространство пространства $X \times X_1$. Следовательно, отображение

$$G(T_1) \ni \{x, T_1 x\} \to T_2 x \in X_2 \tag{10}$$

определяет линейный оператор, отображающий B-пространство $G(T_1)$ в B-пространство X_2. Докажем, что этот оператор замкнут. Допустим, что последовательность $\{x_n, T_1 x_n\}$ сильно сходится в $G(T_1)$, а последовательность $T_2 x_n$ сильно сходится в X_2. Поскольку оператор T_1 замкнут, существует такой элемент $x \in D(T_1)$, что $x = s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ и $T_1 x = s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} T_1 x_n$. По предположению $x \in D(T_2)$, а так как оператор T_2 допускает замкнутое расширение, то предел $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} T_2 x_n$ существует и непременно равен $T_2 x$. Значит, отображение (10) замкнуто, а следовательно, по теореме о замкнутом графике оно должно быть непрерывным. Это и доказывает справедливость неравенства (9).

7. Об одном приложении теоремы о замкнутом графике (теорема Хёрмандера)

Всякое обобщенное решение[1]) $u \in L^2$ уравнения Лапласа

$$\Delta u = f \in L^2$$

[1]) Обобщенные решения ввел С. Л. Соболев (см., например, [2]). — *Прим. перев.*