как пространство $X \times Y$ полно, множество $G(T)$ является $F$-пространством. Соотношение $U\{x, Tx\} = x$ определяет взаимно однозначное непрерывное линейное отображение $U$ $F$-пространства $G(T)$ на $F$-пространство $X$. Следовательно, по теореме об открытости отображения обратное к $U$ отображение $U^{-1}$ непрерывно. Равенство $V\{x, Tx\} = Tx$ определяет в свою очередь линейное непрерывное отображение $V$ пространства $G(T)$ на множество $R(T) \subseteq Y$. Итак, оператор $T = VU^{-1}$, отображающий пространство $X$ в $Y$, непрерывен.

Следующая теорема о сравнении двух линейных операторов принадлежит Хёрмандеру.

**Теорема 2.** Рассмотрим $B$-пространства $X_i$ $(i = 0, 1, 2;\ X_0 = X)$ и линейные операторы $T_i$ $(i = 1, 2)$, отображающие области $D(T_i) \subseteq X$ в пространства $X_i$. Тогда если оператор $T_1$ замкнут, а оператор $T_2$ допускает замкнутое расширение, причем $D(T_1) \subseteq D(T_2)$, то существует такая постоянная $C$, что

$$\| T_2 x \| \leqslant C(\| T_1 x \|^2 + \| x \|^2)^{1/2} \quad \text{для всех } x \in D(T_1). \tag{9}$$

**Доказательство.** График $G(T_1)$ оператора $T_1$ представляет собой замкнутое подпространство пространства $X \times X_1$. Следовательно, отображение

$$G(T_1) \ni \{x, T_1 x\} \to T_2 x \in X_2 \tag{10}$$

определяет линейный оператор, отображающий $B$-пространство $G(T_1)$ в $B$-пространство $X_2$. Докажем, что этот оператор замкнут. Допустим, что последовательность $\{x_n, T_1 x_n\}$ сильно сходится в $G(T_1)$, а последовательность $T_2 x_n$ сильно сходится в $X_2$. Поскольку оператор $T_1$ замкнут, существует такой элемент $x \in D(T_1)$, что $x = s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ и $T_1 x = s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_1 x_n$. По предположению $x \in D(T_2)$, а так как оператор $T_2$ допускает замкнутое расширение, то предел $s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_2 x_n$ существует и непременно равен $T_2 x$. Значит, отображение (10) замкнуто, а следовательно, по теореме о замкнутом графике оно должно быть непрерывным. Это и доказывает справедливость неравенства (9).

## *7. Об одном приложении теоремы о замкнутом графике (теорема Хёрмандера)*

Всякое обобщенное решение [1]) $u \in L^2$ уравнения Лапласа

$$\Delta u = f \in L^2$$

[1]) Обобщенные решения ввел С. Л. Соболев (см., например, [2]). — *Прим. перев.*

представляет собой функцию класса $C^\infty$ после поправки на некотором множестве меры нуль из области, где $f \in C^\infty$. Этот результат известен под названием *леммы Вейля*; он играет важную роль в современной теории потенциала, см. Вейль Г. [1]. Обобщениям леммы Вейля посвящена обширная литература. Исследования Хёрмандера [1] представляются в этой области наиболее многообещающими. Мы начнем изложение с принадлежащего Хёрмандеру определения гипоэллиптического оператора.

**Определение 1.** Пусть $\Omega$ — открытая область пространства $R^n$. Говорят, что функция $u(x)$ $(x \in \Omega)$ принадлежит классу $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, если для любого открытого подмножества $\Omega' \subseteq \Omega$, замыкание которого бикомпактно в $\Omega$, выполняется условие $\int\limits_{\Omega'} |u(x)|^2\,dx < \infty$. Линейный дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами вида

$$P(D) = P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right), \tag{1}$$

где $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — многочлен от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, называется *гипоэллиптическим*, если всякое обобщенное решение $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ уравнения $P(D)u = f$ является функцией класса $C^\infty$ после поправки на множестве меры нуль, принадлежащем области, где $f \in C^\infty$.

**Теорема** (Хёрмандер). Если оператор $P(D)$ гипоэллиптичен, то для сколь угодно большой положительной постоянной $C_1$ существует такая положительная постоянная $C_2$, что любое решение $\zeta = \xi + i\eta$ алгебраического уравнения $P(\zeta) = 0$ удовлетворяет следующему условию:

$$\text{если}\quad |\eta| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant C_2, \quad \text{то}\quad |\zeta| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant C_1. \tag{2}$$

**Доказательство.** Пусть $U$ — совокупность всех обобщенных решений[1]) $u \in L^2(\Omega')$ уравнения $P(D)u = 0$, т. е. множество таких функций $u \in L^2(\Omega')$, что

$$\int\limits_{\Omega'} uP'(D)\varphi\,dx = 0 \quad \text{для всех}\quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega'), \tag{3}$$

---

[1]) Из условия (3) и правил дифференцирования обобщенных функций следует, что обобщенное решение $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega')$ уравнения $P(D)u = 0$ определяется равенством $(P(D)T_u)\varphi = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$. — *Прим. перев.*

где *сопряженный к $P(D)$ дифференциальный оператор $P'(D)$* определяется многочленом

$$P'(\xi) = P(-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_n). \tag{4}$$

Можно показать, что $U$ — замкнутое линейное подпространство пространства $L^2(\Omega')$. Действительно, линейность $U$ следует из линейности оператора $P(D)$. Возьмем теперь последовательность $\{u_h\} \subseteq U$, такую, что $s\text{-}\lim_{h\to\infty} u_h = u$ в $L^2(\Omega')$. Тогда вследствие непрерывности скалярного произведения в $L^2(\Omega')$

$$0 = \lim_{h\to\infty} \int_{\Omega'} u_h P'(D)\varphi\, dx = \int_{\Omega'} uP'(D)\varphi\, dx, \qquad \text{т. е. } u \in U.$$

Таким образом, $U$ — действительно замкнутое линейное подпространство пространства $L^2(\Omega')$ и поэтому является $B$-пространством.

Так как оператор $P(D)$ — гипоэллиптический, мы можем считать, что всякая функция $u \in U$ в области $\Omega'$ принадлежит классу $C^\infty$. Пусть $\Omega_1'$ — любая открытая подобласть с бикомпактным замыканием в $\Omega'$. Тогда для любой функции $u \in U$ функция $\partial u/\partial x_k$ принадлежит $C^\infty$ в $\Omega_1'$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Согласно результатам предыдущего параграфа, отображение

$$U \ni u \to \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega_1') \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

определяет замкнутый линейный оператор. Следовательно, по теореме о замкнутом графике существует такая положительная постоянная $C$, что

$$\int_{\Omega_1'} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx \leqslant C \int_{\Omega'} |u|^2\, dx \qquad \text{для всех } u \in U.$$

Если применить это неравенство к функции $u(x) = e^{i\langle x,\, \zeta\rangle}$, где $\zeta = \xi + i\eta = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2, \ldots, \xi_n + i\eta_n)$ — некоторое решение уравнения $P(\zeta) = 0$ и $\langle x, \zeta\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\zeta_j$, то получится соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 \int_{\Omega_1'} e^{-2\langle x,\, \eta\rangle}\, dx \leqslant C \int_{\Omega'} e^{-2\langle x,\, \eta\rangle}\, dx.$$

Отсюда следует, что величина $|\zeta|$ ограничена, если ограничена $|\eta|$.

**Замечание.** Позже мы докажем, что из условия (2) следует гипоэллиптичность оператора $P(D)$. Этот результат также принадлежит Хёрмандеру. Отсюда, в частности, видно, что лемма Вейля является непосредственным следствием результатов Хёрмандера. Действительно, корни алгебраического уравнения $-\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^2 = 0$ удовлетворяют условию (2).

## Литература к главе II

Банах [1], Бурбаки [2], Данфорд — Шварц [1], Хилле — Филлипс [1], Хёрмандер [6].