ГЛАВА III

Ортогональная проекция и теорема Ф. Рисса о представлении линейного функционала

1. Ортогональная проекция

В предгильбертовом пространстве можно ввести понятие *ортогональности* двух векторов. Это позволяет отождествить гильбертово пространство с его *сопряженным*, т. е. с пространством заданных на нем ограниченных линейных функционалов. Этот результат составляет содержание теоремы Ф. Рисса [1] о представлении, на которую по существу опирается вся теория гильбертовых пространств.

Определение 1. Рассмотрим произвольные векторы x, y предгильбертова пространства X. Если $(x, y) = 0$, то мы будем говорить, что вектор x *ортогонален* вектору y, и писать $x \perp y$. Если $x \perp y$, то и $y \perp x$; кроме того, $x \perp x$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Пусть M — некоторое подмножество предгильбертова пространства X. Через $M^{\perp}$ мы обозначим совокупность всех векторов пространства X, ортогональных каждому вектору $m \in M$.

Теорема 1. Пусть M—замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства X. Тогда $M^{\perp}$ также образует замкнутое линейное подпространство пространства X и называется в этом случае *ортогональным дополнением* подпространства M. Всякий вектор $x \in X$ может быть единственным образом представлен в виде

$$x = m + n, \quad \text{где} \quad m \in M \text{ и } n \in M^{\perp}. \tag{1}$$

Элемент m в формуле (1) называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство M; мы будем обозначать этот элемент через $P_M x$. Оператор P_M мы будем называть оператором проектирования, или *проектором*, на подпространство M. При этом, так как $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$, справедливо соотношение

$$x = P_M x + P_{M^{\perp}} x, \quad \text{т. е. } I = P_M + P_{M^{\perp}}. \tag{1'}$$

Доказательство. Множество $M^{\perp}$ представляет собой линейное подпространство, поскольку скалярное произведение (x, y) является линейной функцией x. Множество $M^{\perp}$ замкнуто, потому что скалярное произведение непрерывно. Единственность разложения (1) следует из того, что единственный вектор, ортогональный самому себе,— это нулевой вектор.

При доказательстве существования разложения (1) мы можем считать, что $M \neq X$ и $x \notin M$, ибо если $x \in M$, то всегда существует тривиальное разложение с $m = x$ и $n = 0$. Итак, поскольку M замкнуто и $x \notin M$, мы имеем

$$d \equiv \inf_{m \in M} \|x - m\| > 0.$$

Пусть $\{m_n\} \subseteq M$ — *минимизирующая последовательность*, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \|x - m_n\| = d$. Эта последовательность фундаментальная. В самом деле, используя равенство $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$, справедливое для элементов всякого предгильбертова пространства (см. формулу (1) § 5 гл. I), мы получаем

$$\begin{aligned}
\|m_k - m_n\|^2 &= \|(x - m_n) - (x - m_k)\|^2 = \\
&= 2(\|x - m_n\|^2 + \|x - m_k\|^2) - \|2x - m_n - m_k\|^2 = \\
&= 2(\|x - m_n\|^2 + \|x - m_k\|^2) - 4\|x - (m_n + m_k)/2\|^2 \leqslant \\
&\leqslant 2(\|x - m_n\|^2 + \|x - m_k\|^2 - 4d^2) \to \\
&\qquad \text{(так как } (m_n + m_k)/2 \in M) \\
&\to 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0 \quad \text{при } k, n \to \infty.
\end{aligned}$$

Так как гильбертово пространство X полно, существует такой элемент $m \in X$, что $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} m_n = m$. При этом $m \in M$, поскольку M замкнуто. Кроме того, в силу непрерывности нормы $\|x - m\| = d$.

Запишем теперь x в виде $x = m + (x - m)$. Если мы положим $n = x - m$, то остается лишь показать, что $n \in M^{\perp}$. Для всякого элемента $m' \in M$ и любого вещественного числа α мы имеем $(m + \alpha m') \in M$, и поэтому

$$\begin{aligned}
d^2 \leqslant \|x - m - \alpha m'\|^2 &= (n - \alpha m', n - \alpha m') = \\
&= \|n\|^2 - \alpha(n, m') - \alpha(m', n) - \alpha^2\|m'\|^2.
\end{aligned}$$

Отсюда, так как $\|n\| = d$, мы получаем $0 \leqslant -2\alpha \operatorname{Re}(n, m') + \alpha^2\|m'\|^2$ для всех вещественных α. Следовательно, $\operatorname{Re}(n, m') = 0$ для всякого элемента $m' \in M$. Заменяя m' на im', мы получаем, что $\operatorname{Im}(n, m') = 0$, и, таким образом, $(n, m') = 0$ для любого вектора $m' \in M$.

Следствие. Для любого замкнутого линейного подпространства M гильбертова пространства X справедлива формула $M = M^{\perp\perp} \equiv (M^{\perp})^{\perp}$.

Теорема 2. Проектор $P = P_M$ является ограниченным линейным оператором, причем

$$P = P^2 \qquad (\textit{идемпотентность} \text{ оператора } P), \tag{2}$$

$$(Px, y) = (x, Py) \text{ для любых } x, y \in X \qquad (\textit{симметричность} \text{ оператора } P). \tag{3}$$

Обратно, ограниченный линейный оператор P, отображающий гильбертово пространство X в X и удовлетворяющий условиям (2) и (3), является проектором на подпространство $M = R(P)$.

Доказательство. Свойство (2) следует из определения ортогональной проекции. При помощи представления (1′), учитывая, что $P_M x \perp P_{M^\perp} y$, мы выводим равенство

$$(P_M x, y) = (P_M x, P_{M^\perp} y + P_M y) = (P_M x, P_M y) = \\ = (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M y) = (x, P_M y).$$

Далее пусть $y = x + z$, $x \in M$, $z \in M^\perp$ и $w = u + v$, $u \in M$, $v \in M^\perp$; тогда $y + w = (x+u) + (z+v)$, где $(x+u) \in M$, $(z+v) \in M^\perp$, и поэтому в силу единственности разложения (1) $P_M(y+w) = P_M y + P_M w$. Аналогично устанавливается, что $P_M(\alpha y) = \alpha P_M y$. Таким образом, P_M — линейный оператор. Ограниченность оператора P_M следует из неравенства

$$\|x\|^2 = \|P_M x + P_{M^\perp} x\|^2 = (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M x + P_{M^\perp} x) = \\ = \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2 \geqslant \|P_M x\|^2.$$

Отсюда, в частности, видно, что

$$\|P_M\| \leqslant 1. \tag{4}$$

Обратное утверждение теоремы доказывается следующим образом. Так как P — линейный оператор, множество $M = R(P)$ представляет собой линейное подпространство: Условие $x \in M$ эквивалентно существованию такого элемента $y \in X$, что $x = Py$, а это в свою очередь, согласно (2), эквивалентно соотношению $x = Py = P^2 y = Px$. Значит, условие $x \in M$ эквивалентно равенству $x = Px$. Подпространство M замкнуто; в самом деле, если $x_n \in M$ и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, то вследствие непрерывности P и условия $x_n = Px_n$ имеем $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Px_n = Py$, т. е. $y = Py$.

Остается показать, что $P = P_M$. Если $x \in M$, то $Px = x = P_M x$, а если $y \in M^\perp$, то $P_M y = 0$. В последнем случае, кроме того, $(Py, Py) = (y, P^2 y) = (y, Py) = 0$, и поэтому $Py = 0$. Следовательно, для любого элемента $y \in X$ мы имеем

$$Py = P(P_M y + P_{M^\perp} y) = PP_M y + PP_{M^\perp} y = \\ = P_M y + 0, \quad \text{т. е. } Py = P_M y.$$

Операторы проектирования характеризуются также следующей теоремой.

Теорема 3. Для того чтобы ограниченный линейный оператор P, отображающий гильбертово пространство X в себя, был проектором, необходимо и достаточно, чтобы P удовлетворял условиям $P=P^2$ и $\|P\|\leqslant 1$.

Доказательство. Мы должны доказать лишь достаточность этих условий. Положим $M=R(P)$ и $N=N(P)=\{y;\ Py=0\}$. Рассуждения, использованные при доказательстве предыдущей теоремы 2, позволяют установить, что множество M замкнуто и что условие $x\in M$ эквивалентно равенству $x=Px$. Множество N вследствие непрерывности оператора P тоже образует замкнутое линейное подпространство. В разложении $x=Px+(I-P)x$ мы имеем $Px\in M$ и $(I-P)x\in N$; последнее очевидным образом следует из тождества $P(I-P)=P-P^2=0$.

Теперь мы должны показать, что $N=M^{\perp}$. В силу равенства $P=P^2$ для всякого $x\in X$ мы имеем $y=Px-x\in N$. Поэтому, в частности, если $x\in N^{\perp}$, то $Px=x+y$, где $(x, y)=0$. Но тогда $\|x\|^2\geqslant\|Px\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, откуда $y=0$. Итак, мы доказали, что для $x\in N^{\perp}$ справедливо равенство $x=Px$, т. е. $N^{\perp}\subseteq M=R(P)$. Обратно, пусть $z\in M=R(P)$, так что $z=Pz$. Тогда имеет место ортогональное разложение $z=y+x$, $y\in N$, $x\in N^{\perp}$, и поэтому $z=Pz=Py+Px=Px=x$, где последнее равенство доказано выше. Отсюда следует, что $M=R(P)\subseteq N^{\perp}$. Таким образом, $M=N^{\perp}$ и $N=M^{\perp}$, поскольку $N=(N^{\perp})^{\perp}$.

2. „Почти ортогональные" элементы

В произвольном нормированном линейном пространстве, вообще говоря, нельзя ввести понятие ортогональности; можно, однако, доказать следующее утверждение.

Теорема (Ф. Рисс [2]). Пусть X — некоторое нормированное линейное пространство, а M — его произвольное замкнутое линейное подпространство. Допустим, что $M\neq X$. Тогда для любого $\varepsilon>0$, удовлетворяющего неравенству $0<\varepsilon<1$, существует такой элемент $x_\varepsilon\in X$, что

$$\|x_\varepsilon\|=1 \text{ и } \operatorname{dis}(x_\varepsilon, M)\equiv\inf_{m\in M}\|x_\varepsilon-m\|\geqslant 1-\varepsilon. \tag{1}$$

Такие элементы x_ε мы называем „почти ортогональными" подпространству M.

Доказательство. Пусть $y\in X-M$. Тогда $\operatorname{dis}(y, M)=$ $=\inf_{m\in M}\|y-m\|=\alpha>0$, так как M—замкнутое множество. Поэтому существует такой элемент $m_\varepsilon\in M$, что $\|y-m_\varepsilon\|\leqslant\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$.