Теорема 3. Для того чтобы ограниченный линейный оператор P, отображающий гильбертово пространство X в себя, был проектором, необходимо и достаточно, чтобы P удовлетворял условиям $P = P^2$ и $\|P\| \leqslant 1$.

Доказательство. Мы должны доказать лишь достаточность этих условий. Положим $M = R(P)$ и $N = N(P) = \{y;\ Py = 0\}$. Рассуждения, использованные при доказательстве предыдущей теоремы 2, позволяют установить, что множество M замкнуто и что условие $x \in M$ эквивалентно равенству $x = Px$. Множество N вследствие непрерывности оператора P тоже образует замкнутое линейное подпространство. В разложении $x = Px + (I - P)x$ мы имеем $Px \in M$ и $(I - P)x \in N$; последнее очевидным образом следует из тождества $P(I - P) = P - P^2 = 0$.

Теперь мы должны показать, что $N = M^{\perp}$. В силу равенства $P = P^2$ для всякого $x \in X$ мы имеем $y = Px - x \in N$. Поэтому, в частности, если $x \in N^{\perp}$, то $Px = x + y$, где $(x, y) = 0$. Но тогда $\|x\|^2 \geqslant \|Px\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, откуда $y = 0$. Итак, мы доказали, что для $x \in N^{\perp}$ справедливо равенство $x = Px$, т. е. $N^{\perp} \subseteq M = R(P)$. Обратно, пусть $z \in M = R(P)$, так что $z = Pz$. Тогда имеет место ортогональное разложение $z = y + x$, $y \in N$, $x \in N^{\perp}$, и поэтому $z = Pz = Py + Px = Px = x$, где последнее равенство доказано выше. Отсюда следует, что $M = R(P) \subseteq N^{\perp}$. Таким образом, $M = N^{\perp}$ и $N = M^{\perp}$, поскольку $N = (N^{\perp})^{\perp}$.

2. *„Почти ортогональные" элементы*

В произвольном нормированном линейном пространстве, вообще говоря, нельзя ввести понятие ортогональности; можно, однако, доказать следующее утверждение.

Теорема (Ф. Рисс [2]). Пусть X — некоторое нормированное линейное пространство, а M — его произвольное замкнутое линейное подпространство. Допустим, что $M \neq X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству $0 < \varepsilon < 1$, существует такой элемент $x_\varepsilon \in X$, что

$$\|x_\varepsilon\| = 1 \text{ и } \operatorname{dis}(x_\varepsilon, M) \equiv \inf_{m \in M} \|x_\varepsilon - m\| \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{1}$$

Такие элементы x_ε мы называем „почти ортогональными" подпространству M.

Доказательство. Пусть $y \in X - M$. Тогда $\operatorname{dis}(y, M) = \inf_{m \in M} \|y - m\| = \alpha > 0$, так как M—замкнутое множество. Поэтому существует такой элемент $m_\varepsilon \in M$, что $\|y - m_\varepsilon\| \leqslant \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)$.

Вектор $x_\varepsilon = (y - m_\varepsilon)/\|y - m_\varepsilon\|$ удовлетворяет условию $\|x_\varepsilon\| = 1$ и

$$\|x_\varepsilon - m\| = \|y - m_\varepsilon\|^{-1} \cdot \|y - m_\varepsilon - \|y - m_\varepsilon\| \cdot m\| \geqslant$$
$$\geqslant \|y - m_\varepsilon\|^{-1} \alpha \geqslant \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{-1} = (1 - \varepsilon).$$

Следствие 1. Допустим, что в нормированном линейном пространстве X имеется последовательность замкнутых линейных подпространств M_n, удовлетворяющая условиям $M_n \subseteq M_{n+1}$ и $M_n \neq M_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда существует такая последовательность $\{y_n\}$, что

$$y_n \in M_n, \quad \|y_n\| = 1 \text{ и } \operatorname{dis}(y_{n+1}, M_n) \geqslant \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Следствие 2. Единичный шар $S = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ B-пространства X бикомпактен тогда и только тогда, когда пространство X конечномерно.

Доказательство. Достаточность этого условия следует из теоремы Больцано — Вейерштрасса, согласно которой всякое ограниченное замкнутое множество в R^n бикомпактно. Необходимость доказывается следующим образом. Предположим, что шар S бикомпактен в бесконечномерном B-пространстве X. Тогда, используя предыдущее следствие, можно построить последовательность $\{y_n\}$, удовлетворяющую условиям $\|y_n\| = 1$ и $\|y_m - y_n\| \geqslant 1/2$ при $m > n$, а это, очевидно, противоречит предположению о бикомпактности шара S.

3. Теорема Асколи—Арцела

Следующая теорема позволяет привести пример относительно бикомпактного бесконечного подмножества бесконечномерного B-пространства.

Теорема (Асколи — Арцела). Пусть S — произвольное бикомпактное метрическое пространство, и пусть $C(S)$ обозначает B-пространство всех вещественных (или комплексных) непрерывных функций $x(s)$ на S с нормой $\|x\| = \sup\limits_{s \in S} |x(s)|$. Тогда последовательность $\{x_n(s)\} \subseteq C(S)$ относительно бикомпактна в $C(S)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

функции $x_n(s)$ *равномерно ограничены* (по n), т. е.

$$\sup_{n \geqslant 1} \sup_{s \in S} |x_n(s)| < \infty; \tag{1}$$

функции $x_n(s)$ *равностепенно непрерывны* (по n), т. е.

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{n \geqslant 1,\ \operatorname{dis}(s', s'') \leqslant \delta} |x_n(s') - x_n(s'')| = 0. \tag{2}$$