Вектор $x_\varepsilon=(y-m_\varepsilon)/\|y-m_\varepsilon\|$ удовлетворяет условию $\|x_\varepsilon\|=1$ и

$$\|x_\varepsilon-m\|=\|y-m_\varepsilon\|^{-1}\cdot\|y-m_\varepsilon-\|y-m_\varepsilon\|\cdot m\|\geqslant$$
$$\geqslant\|y-m_\varepsilon\|^{-1}\alpha\geqslant\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{-1}=(1-\varepsilon).$$

Следствие 1. Допустим, что в нормированном линейном пространстве X имеется последовательность замкнутых линейных подпространств M_n, удовлетворяющая условиям $M_n\subseteq M_{n+1}$ и $M_n\neq M_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Тогда существует такая последовательность $\{y_n\}$, что

$$y_n\in M_n,\quad \|y_n\|=1 \text{ и } \operatorname{dis}(y_{n+1}, M_n)\geqslant\frac{1}{2}\quad (n=1, 2, \ldots).\tag{2}$$

Следствие 2. Единичный шар $S=\{x\in X;\ \|x\|\leqslant 1\}$ B-пространства X бикомпактен тогда и только тогда, когда пространство X конечномерно.

Доказательство. Достаточность этого условия следует из теоремы Больцано — Вейерштрасса, согласно которой всякое ограниченное замкнутое множество в R^n бикомпактно. Необходимость доказывается следующим образом. Предположим, что шар S бикомпактен в бесконечномерном B-пространстве X. Тогда, используя предыдущее следствие, можно построить последовательность $\{y_n\}$, удовлетворяющую условиям $\|y_n\|=1$ и $\|y_m-y_n\|\geqslant 1/2$ при $m>n$, а это, очевидно, противоречит предположению о бикомпактности шара S.

3. Теорема Асколи—Арцела

Следующая теорема позволяет привести пример относительно бикомпактного бесконечного подмножества бесконечномерного B-пространства.

Теорема (Асколи — Арцела). Пусть S — произвольное бикомпактное метрическое пространство, и пусть $C(S)$ обозначает B-пространство всех вещественных (или комплексных) непрерывных функций $x(s)$ на S с нормой $\|x\|=\sup\limits_{s\in S}|x(s)|$. Тогда последовательность $\{x_n(s)\}\subseteq C(S)$ относительно бикомпактна в $C(S)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

функции $x_n(s)$ *равномерно ограничены* (по n), т. е.

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{s\in S}|x_n(s)|<\infty;\tag{1}$$

функции $x_n(s)$ *равностепенно непрерывны* (по n), т. е.

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\ \sup_{n\geqslant 1,\ \operatorname{dis}(s',s'')\leqslant\delta}|x_n(s')-x_n(s'')|=0.\tag{2}$$

Доказательство. По теореме Больцано — Вейерштрасса всякая ограниченная последовательность комплексных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, при любом фиксированном s из последовательности $\{x_n(s)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. С другой стороны, поскольку метрическое пространство S бикомпактно, существует счетное плотное подмножество $\{s_n\} \subseteq S$, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное подмножество $\{s_{n_j};\ 1 \leqslant n_j \leqslant k(\varepsilon)\}$ множества $\{s_n\}$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{s \in S} \inf_{1 \leqslant n_j \leqslant k(\varepsilon)} \operatorname{dis}(s, s_{n_j}) \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Этот факт доказывается следующим образом. Так как множество S бикомпактно, оно вполне ограничено (см. § 2 введения). Поэтому для любого $\delta > 0$ существует конечная система точек из S, такая, что всякая точка множества S удалена на расстояние $\leqslant \delta$ от некоторой точки этой системы. Придавая δ значения $1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots$ и объединяя соответствующие конечные системы, мы получаем последовательность $\{s_n\}$, обладающую требуемым свойством.

При помощи диагонального процесса можно выбрать из $\{x_n(s)\}$ подпоследовательность $\{x_{n'}(s)\}$, сходящуюся одновременно во всех точках $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$. Так как функции $x_n(s)$ равностепенно непрерывны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $\operatorname{dis}(s', s'') \leqslant \delta$ для всех значений $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $|x_n(s') - x_n(s'')| \leqslant \varepsilon$. Поэтому для любой точки $s \in S$ найдется номер j, $j \leqslant k(\delta)$, такой, что

$$|x_{n'}(s) - x_{m'}(s)| \leqslant |x_{n'}(s) - x_{n'}(s_{n_j})| + |x_{n'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})| +$$
$$+ |x_{m'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})| \leqslant 2\varepsilon + |x_{n'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})|.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n', m' \to \infty} \max\limits_{s} |x_{n'}(s) - x_{m'}(s)| \leqslant 2\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n', m' \to \infty} \|x_{n'} - x_{m'}\| = 0$; отсюда нетрудно вывести утверждение теоремы.

4. *Ортогональный базис. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля*

Определение 1. Множество S векторов предгильбертова пространства X называется *ортогональным семейством* (*системой*), если $x \perp y$ для любой пары различных векторов x, y, принадлежащих S. Если, кроме того, $\|x\| = 1$ для всех $x \in S$, то S называется *ортонормированным* (*ортонормальным*) *семейством* (системой). Ортонормированное семейство S гильбертова пространства X называется *полной ортонормированной системой*, или *ортонормированным базисом*, пространства X, если S не является собственным