Доказательство. По теореме Больцано — Вейерштрасса всякая ограниченная последовательность комплексных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, при любом фиксированном s из последовательности $\{x_n(s)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. С другой стороны, поскольку метрическое пространство S бикомпактно, существует счетное плотное подмножество $\{s_n\} \subseteq S$, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное подмножество $\{s_{n_j};\ 1 \leqslant n_j \leqslant k(\varepsilon)\}$ множества $\{s_n\}$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{s \in S} \inf_{1 \leqslant n_j \leqslant k(\varepsilon)} \operatorname{dis}(s, s_{n_j}) \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Этот факт доказывается следующим образом. Так как множество S бикомпактно, оно вполне ограничено (см. § 2 введения). Поэтому для любого $\delta > 0$ существует конечная система точек из S, такая, что всякая точка множества S удалена на расстояние $\leqslant \delta$ от некоторой точки этой системы. Придавая δ значения $1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots$ и объединяя соответствующие конечные системы, мы получаем последовательность $\{s_n\}$, обладающую требуемым свойством.

При помощи диагонального процесса можно выбрать из $\{x_n(s)\}$ подпоследовательность $\{x_{n'}(s)\}$, сходящуюся одновременно во всех точках $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$. Так как функции $x_n(s)$ равностепенно непрерывны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $\operatorname{dis}(s', s'') \leqslant \delta$ для всех значений $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $|x_n(s') - x_n(s'')| \leqslant \varepsilon$. Поэтому для любой точки $s \in S$ найдется номер j, $j \leqslant k(\delta)$, такой, что

$$|x_{n'}(s) - x_{m'}(s)| \leqslant |x_{n'}(s) - x_{n'}(s_{n_j})| + |x_{n'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})| +$$
$$+ |x_{m'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})| \leqslant 2\varepsilon + |x_{n'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})|.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n', m' \to \infty} \max\limits_{s} |x_{n'}(s) - x_{m'}(s)| \leqslant 2\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n', m' \to \infty} \|x_{n'} - x_{m'}\| = 0$; отсюда нетрудно вывести утверждение теоремы.

4. Ортогональный базис. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля

Определение 1. Множество S векторов предгильбертова пространства X называется *ортогональным семейством* (*системой*), если $x \perp y$ для любой пары различных векторов x, y, принадлежащих S. Если, кроме того, $\|x\| = 1$ для всех $x \in S$, то S называется *ортонормированным* (*ортонормальным*) *семейством* (системой). Ортонормированное семейство S гильбертова пространства X называется *полной ортонормированной системой*, или *ортонормированным базисом*, пространства X, если S не является собственным подмножеством никакой другой ортонормированной системы пространства X.

Теорема 1. Во всяком гильбертовом пространстве X, содержащем хотя бы один ненулевой вектор, имеется по крайней мере одна полная ортонормированная система. Кроме того, для любой ортонормированной системы S пространства X существует полная ортонормированная система, содержащая S как подмножество.

Доказательство (опирающееся на лемму Цорна). Пусть S — некоторая ортонормированная система в X. Такие системы в X обязательно существуют: например, если $x \neq 0$, то можно рассматривать в качестве такой системы вектор $x/\|x\|$. Рассмотрим совокупность $\{S\}$ всех ортонормированных систем, содержащих S как подмножество; множество $\{S\}$ станет частично упорядоченным, если положить $S_1 \prec S_2$, когда $S_1 \subseteq S_2$. Пусть $\{S'\}$ — некоторая линейно упорядоченная подсистема системы $\{S\}$; множество $\bigcup\limits_{S' \in \{S'\}} S'$ является ортонормированной системой и служит мажорантой системы $\{S'\}$. Тогда по лемме Цорна существует максимальный элемент S_0 системы $\{S\}$. Ортонормированная система S_0 содержит S и в силу свойства максимальности должна быть полной ортонормированной системой.

Теорема 2. Пусть $S = \{x_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — некоторая полная ортонормированная система гильбертова пространства X. Для любого элемента $f \in X$ определим его *коэффициенты Фурье* (по отношению к системе S) формулой

$$f_\alpha = (f,\ x_\alpha). \tag{1}$$

Тогда справедливо *равенство Парсеваля*

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |f_\alpha|^2. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала мы докажем *неравенство Бесселя*

$$\sum_{\alpha \in A} |f_\alpha|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{2'}$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — любая конечная система индексов α. Для всякой конечной системы комплексных чисел $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \ldots, c_{\alpha_n}$ ввиду ортонормированности системы $\{x_\alpha\}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}\Big\|f - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j}\Big\|^2 &= \Big(f - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j},\ f - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j}\Big) = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} \bar{f}_{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{\alpha_j} f_{\alpha_j} + \sum_{j=1}^{n} |c_{\alpha_j}|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_\alpha|^2 + \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j} - c_{\alpha_j}|^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Поэтому минимум выражения $\left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2$ при фиксированных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ достигается, когда $c_{\alpha_j} = f_{\alpha_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом,

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{j=1}^{n} | f_{\alpha_j} |^2$$

$$\text{и, следовательно,} \quad \sum_{j=1}^{n} | f_{\alpha_j} |^2 \leqslant \| f \|^2. \tag{4}$$

Поскольку индексы $a_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ были выбраны произвольно, мы заключаем, что $f_\alpha \neq 0$ не более чем для счетного множества элементов α, скажем для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, так что неравенство Бесселя (2′) действительно выполняется. Покажем теперь, что $f = s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$. Прежде всего последовательность $\left\{ \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\}$ фундаментальна, так как в силу ортонормированности системы $\{x_\alpha\}$

$$\left\| \sum_{j=k}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 = \left(\sum_{j=k}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}, \sum_{j=k}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right) = \sum_{j=k}^{n} | f_{\alpha_j} |^2,$$

а последнее выражение, как следует из неравенства (4), стремится к нулю при $k \to \infty$. Положим $f' = s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$ и покажем, что вектор $(f - f')$ ортогонален к каждому вектору системы S. В силу непрерывности скалярного произведения

$$(f - f', x_{\alpha_j}) = \lim_{n \to \infty} \left(f - \sum_{k=1}^{n} f_{\alpha_k} x_{\alpha_k}, x_{\alpha_j} \right) = f_{\alpha_j} - f_{\alpha_j} = 0,$$

и если $\alpha \neq \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то

$$(f - f', x_\alpha) = \lim_{n \to \infty} \left(f - \sum_{k=1}^{n} f_{\alpha_k} x_{\alpha_k}, x_\alpha \right) = 0 - 0 = 0.$$

Таким образом, вследствие полноты ортонормированной системы $S = \{x_\alpha\}$ непременно $(f - f') = 0$. Отсюда, учитывая непрерывность нормы и неравенство (4), мы получаем

$$0 = \lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 =$$

$$= \| f \|^2 - \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \| f_{\alpha_j} \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{\alpha \in A} | f_\alpha |^2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Справедлива формула

$$f=\sum_{j=1}^{\infty} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}, \tag{5}$$

которая называется *разложением Фурье* элемента $f \in X$.

Следствие 2. Обозначим через $l^2(A)$ пространство $L^2(A, \mathfrak{B}, m)$, в котором $m(\{\alpha\})=1$ для каждой точки α множества A. Тогда гильбертово пространство X *изометрически изоморфно* гильбертову пространству $l^2(A)$, а именно соответствие

$$X \ni f \longleftrightarrow \{f_\alpha\} \in l^2(A) \tag{6}$$

взаимно однозначно и удовлетворяет условиям

$$(f+g) \longleftrightarrow \{f_\alpha + g_\alpha\}, \quad \beta f \longleftrightarrow \{\beta f_\alpha\} \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = \|\{f_\alpha\}\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |f_\alpha|^2. \tag{7}$$

Пример. Множество функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int};\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\right\}$ образует полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $L^2(0, 2\pi)$.

Доказательство. Требуется доказать лишь полноту этой системы. Из (3) следует, что

$$\left\| f-\sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} c_j e^{ijt} \right\|^2 \geqslant \left\| f-\sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} f_j e^{ijt} \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=-n}^{n} |f_j|^2,$$

где $f_j=(f,\ e^{ijt})$.

Если функция $f \in L^2(0, 2\pi)$ непрерывна и периодична с периодом 2π, то левая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими полиномами (см. § 2 введения). Таким образом, множество всех конечных линейных комбинаций вида $\sum_j c_j e^{ijt}$ плотно по норме в подпространстве пространства $L^2(0, 2\pi)$, состоящем из всех непрерывных функций периода 2π. Последнее же подпространство плотно по норме в пространстве $L^2(0, 2\pi)$. Следовательно, всякая функция $f \in L^2(0, 2\pi)$, ортогональная ко всем функциям системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}\right\}$, должна совпадать с нулевым вектором пространства $L^2(0, 2\pi)$. Тем самым доказано, что функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ образуют полную ортонормированную систему в $L^2(0, 2\pi)$.