5. Ортогонализация (по Шмидту)

Теорема (теорема Шмидта об ортогонализации). Пусть задана конечная или счетная последовательность $\{x_j\}$ линейно независимых векторов предгильбертова пространства X. Тогда можно построить ортонормированную систему той же мощности, что и $\{x_j\}$, порождающую[1]) то же линейное подпространство, что и $\{x_j\}$.

Доказательство. Ясно, что $x_1 \neq 0$. Определим векторы $y_1, y_2, \ldots$ и $u_1, u_2, \ldots$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$y_1 = x_1, \qquad u_1 = y_1/\|y_1\|,$$
$$y_2 = x_2 - (x_2, u_1)u_1, \qquad u_2 = y_2/\|y_2\|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n}(x_{n+1}, u_j)u_j, \qquad u_{n+1} = y_{n+1}/\|y_{n+1}\|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если $\{x_j\}$ — конечное множество, то этот процесс на некотором шаге заканчивается. В противном случае он продолжается неограниченно. Заметим, что $y_n \neq 0$, так как векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимы. Таким образом, векторы u_n определены корректно. По индукции легко установить, что каждый вектор u_n является линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, обратно, каждый вектор x_n есть линейная комбинация векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Поэтому замкнутые линейные подпространства, натянутые на векторы $x_1, x_2, \ldots$ и $u_1, u_2, \ldots$, совпадают.

Так как $\|u_1\| = 1$, то $y_2 \perp u_1$, и поэтому $u_2 \perp u_1$. Аналогично из условия $\|u_1\| = 1$ следует, что $y_3 \perp u_1$ и, следовательно, $u_3 \perp u_1$. Повторяя эти рассуждения, мы убеждаемся в том, что вектор u_1 ортогонален к $u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$. Далее из условия $\|u_2\| = 1$ мы заключаем, что $y_3 \perp u_2$ и, следовательно, $u_3 \perp u_2$. Продолжая эти рассуждения, мы видим, что $u_k \perp u_m$ при любых $k > m$. Таким образом, множество $\{u_j\}$ образует ортонормированную систему.

Следствие. Допустим, что гильбертово пространство X *сепарабельно*, т. е. в нем имеется счетное плотное подмножество. Тогда в пространстве X существует полная ортонормированная система, содержащая не более чем счетное множество элементов[2]).

---

[1]) Замыкание множества всех конечных линейных комбинаций $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ($n = 1, 2, \ldots$; $x_j \in A$), где A — подмножество линейного топологического пространства X, образует замкнутое линейное подпространство в X, которое называют натянутым на A. Говорят также, что A порождает это подпространство. — *Прим. перев.*

[2]) Заметим, что никакая ортонормированная система сепарабельного гильбертова пространства X не может содержать более чем счетное множество элементов. — *Прим. перев.*

Доказательство. Допустим, что счетная последовательность $\{a_j\}$ векторов пространства X образует в X плотное множество. Пусть x_1 — первый отличный от нуля элемент последовательности $\{a_j\}$, x_2 — первый из элементов a_j, не лежащий в замкнутом подпространстве, натянутом на вектор x_1, наконец, x_n — первый из элементов a_j, не принадлежащих замкнутому подпространству, натянутому на векторы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ясно, что замкнутые линейные подпространства, натянутые на векторы $\{a_j\}$ и $\{x_j\}$, совпадают со всем пространством X, так как множество $\{a_j\}$ плотно в X. Применяя теперь к системе $\{x_j\}$ процесс ортогонализации по Шмидту, мы получим ортонормированную систему $\{u_j\}$, которая не более чем счетна и порождает пространство X.

Система $\{u_j\}$ полная, так как в противном случае существовал бы ненулевой вектор, ортогональный ко всем элементам u_j и поэтому ко всему пространству X, натянутому на векторы u_j.

Пример ортогонализации. Примем за множество S интервал (a, b) и рассмотрим вещественное гильбертово пространство $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$, где $\mathfrak{B}$ — совокупность всех бэровских подмножеств интервала (a, b). Применяя к системе одночленов

$$1, s, s^2, s^3, \ldots, s^n, \ldots$$

процесс ортогонализации, мы получим систему так называемых *полиномов Чебышева*

$$P_0(s) = \text{const}, P_1(s), P_2(s), P_3(s), \ldots, P_n(s), \ldots,$$

удовлетворяющих условиям

$$\int_a^b P_i(s) P_j(s)\, m(ds) = \delta_{ij}$$

($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). В частном случае, когда $a = -1$, $b = 1$ и $m(ds) = ds$, получается система *полиномов Лежандра*. Если $a = -\infty$, $b = \infty$ и $m(ds) = e^{-s^2} ds$, мы получаем *полиномы Эрмита*, и, наконец, при $a = 0$, $b = \infty$ и $m(ds) = e^{-s}\, ds$ получаются *полиномы Лагерра*.

Нетрудно заметить, что в случае $-\infty < a < b < \infty$ ортонормированная система $\{P_j(s)\}$ будет полной. В самом деле, можно рассуждать так же, как при доказательстве полноты тригонометрической системы (см. пример в § 4). Нужно только вместо теоремы Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими полиномами воспользоваться теоремой Вейерштрасса об аппроксимации алгебраическими многочленами. По поводу доказательства полноты систем полиномов Эрмита и Лагерра мы отсылаем читателя к работам Сегё [1] или Иосида [1].