6. Теорема Ф. Рисса о представлении линейного функционала

Теорема (теорема Ф. Рисса). Пусть на гильбертовом пространстве X задан ограниченный линейный функционал f. Тогда существует однозначно определенный вектор y_f пространства X, такой, что

$$f(x) = (x, y_f) \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{и} \quad \|f\| = \|y_f\|. \tag{1}$$

Обратно, если $y \in X$ — произвольный вектор, то формула

$$f_y(x) = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x \in X \tag{2}$$

определяет на пространстве X ограниченный линейный функционал f_y, причем $\|f_y\| = \|y\|$.

Доказательство. Единственность вектора y_f очевидна, так как если $(x, z) = 0$ для всех $x \in X$, то $z = 0$. Чтобы доказать его существование, рассмотрим *нуль-многообразие* $N = N(f) = \{x \in X; f(x) = 0\}$ функционала f. Так как f — непрерывный линейный функционал, то N представляет собой замкнутое линейное подпространство. Утверждение теоремы тривиально, когда $N = X$: в этом случае можно положить $y_f = 0$. Допустим, что $N \neq X$. Тогда существует элемент $y_0 \neq 0$, принадлежащий ортогональному дополнению $N^{\perp}$ (теорема 1, § 1, гл. III). Определим y_f соотношением

$$y_f = (\overline{f(y_0)}/\|y\|^2)\, y_0. \tag{3}$$

Покажем, что этот вектор y_f удовлетворяет условию теоремы. Если $x \in N$, то обе части равенства $f(x) = (x, y_f)$ равны нулю. Если x имеет вид $x = \alpha y_0$, то

$$(x, y_f) = (\alpha y_0, y_f) = \left(\alpha y_0, \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0\right) = \alpha f(y_0) = f(\alpha y_0) = f(x).$$

Поскольку функционал $f(x)$ и скалярное произведение (x, y_f) зависят от x линейно, равенство $f(x) = (x, y_f)$ будет доказано, если мы убедимся в том, что пространство X натянуто на вектор y_0 и подпространство N Чтобы доказать последнее утверждение, мы, учитывая, что $f(y_f) \neq 0$, напишем тождество

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f\right) + \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f.$$

Первое слагаемое в правой части принадлежит N, так как

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(y_f)} y_f\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_f)} f(y_f) = 0;$$

таким образом, пространство X натянуто на N и y_0 и представление $f(x) = (x, y_f)$ доказано.

Используя это представление, мы получаем

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(x, y_f)| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|x\| \cdot \|y_f\| = \|y_f\|;$$

кроме того,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant |f(y_f/\|y_f\|)| = \left(\frac{y_f}{\|y_f\|}, y_f\right) = \|y_f\|.$$

Отсюда

$$\|f\| = \|y_f\|.$$

Заключительное утверждение теоремы вытекает из неравенства $|f_y(x)| = |(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Следствие 1. Пусть X — гильбертово пространство. Совокупность X' всех ограниченных линейных функционалов на X представляет собой гильбертово пространство, причем существует взаимно однозначное соответствие $f \longleftrightarrow y_f$ между X' и X, при котором сохраняется норма. Это соответствие позволяет отождествить X' с X как абстрактное множество.

Однако нельзя отождествить X' и X как линейные пространства, так как соответствие $f \longleftrightarrow y_f$ является *сопряженно-линейным*:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \longleftrightarrow (\bar{\alpha}_1 y_{f_1} + \bar{\alpha}_2 y_{f_2}), \tag{4}$$

где α_1 и α_2 — комплексные числа.

Доказательство. Нетрудно проверить, что множество X' со скалярным произведением $(f_1, f_2) = \overline{(y_{f_1}, y_{f_2})}$ действительно образует гильбертово пространство и утверждение следствия 1 становится очевидным.

Следствие 2. Всякий непрерывный линейный функционал T, заданный на гильбертовом пространстве X', можно отождествить с однозначно определенным элементом t пространства X с помощью формулы

$$T(f) = f(t) \quad \text{для всех} \quad f \in X'. \tag{5}$$

Доказательство. Это утверждение вытекает из того, что произведение двух сопряженно-линейных преобразований является линейным преобразованием.

Определение. Пространство X' называется *сопряженным* к X. Мы можем, следовательно, отождествить гильбертово пространство X с его *вторым сопряженным* $X'' = (X')'$, как показывает следствие 2. Это свойство гильбертовых пространств называется *рефлексивностью*.

Следствие 3. Пусть X — гильбертово пространство, а X' — его сопряженное. Тогда для любого множества F из X', плотного в X', имеет место формула

$$\|x_0\| = \sup_{f \in F, \|f\| \leqslant 1} |f(x_0)|, \qquad x_0 \in X. \tag{6}$$

Доказательство. Можно допустить, что $x_0 \neq 0$, так как в противном случае формула (6) очевидна. Ввиду того что $(x_0, x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$, существует ограниченный линейный функционал f_0 на X, такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Так как $f(x_0) = (x_0, y_f)$ непрерывно по y_f и соответствие $f \longleftrightarrow y_f$ сохраняет норму, мы видим, что формула (6) действительно имеет место вследствие плотности подмножества F в X'.

Замечание. Первоначальное определение Гильберта относилось к пространству (l^2) (см. Гильберт [1]). Аксиоматическое определение (гл. I, § 9) гильбертова пространства в предположении его сепарабельности дал фон Нейман [1]. Приведенную выше теорему о представлении линейного функционала без предположения о том, что рассматриваемое гильбертово пространство сепарабельно, доказал Ф. Рисс [1]. В этой работе Рисса было подчеркнуто, что вся теория гильбертовых пространств может быть развита на основе этой теоремы.

7. Теорема Лакса — Мильграма

Теорема Лакса — Мильграма [1], представляющая собой вариант теоремы Рисса о представлении линейного функционала, оказалась полезной в ряде исследований последних лет, относящихся к вопросам существования решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Теорема (Лакс, Мильграм). Пусть X — гильбертово пространство, и пусть $B(x, y)$ — комплексный функционал, заданный на гильбертовом пространстве $X \times X$ и обладающий свойствами

полуторалинейности:

$$\begin{aligned} B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) &= \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y), \\ B(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) &= \bar{\beta}_1 B(x, y_1) + \bar{\beta}_2 B(x, y_2), \end{aligned} \tag{1}$$

ограниченности: существует такая положительная постоянная γ, что

$$|B(x, y)| \leqslant \gamma \|x\| \cdot \|y\|, \tag{2}$$

положительности: существует положительная постоянная δ, такая, что

$$B(x, x) \geqslant \delta \|x\|^2. \tag{3}$$

Тогда существует определенный единственным образом ограниченный линейный оператор S, обладающий ограниченным обратным линейным оператором S^{-1}, такой, что

$$(x, y) = B(x, Sy) \text{ для всех } x \text{ и } y \in X \text{ и } \|S\| \leqslant \delta^{-1}, \ \|S^{-1}\| \leqslant \gamma. \tag{4}$$