Доказательство. Можно допустить, что $x_0 \neq 0$, так как в противном случае формула (6) очевидна. Ввиду того что $(x_0, x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$, существует ограниченный линейный функционал f_0 на X, такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Так как $f(x_0) = (x_0, y_f)$ непрерывно по y_f и соответствие $f \longleftrightarrow y_f$ сохраняет норму, мы видим, что формула (6) действительно имеет место вследствие плотности подмножества F в X'.

Замечание. Первоначальное определение Гильберта относилось к пространству (l^2) (см. Гильберт [1]). Аксиоматическое определение (гл. I, § 9) гильбертова пространства в предположении его сепарабельности дал фон Нейман [1]. Приведенную выше теорему о представлении линейного функционала без предположения о том, что рассматриваемое гильбертово пространство сепарабельно, доказал Ф. Рисс [1]. В этой работе Рисса было подчеркнуто, что вся теория гильбертовых пространств может быть развита на основе этой теоремы.

7. Теорема Лакса — Мильграма

Теорема Лакса — Мильграма [1], представляющая собой вариант теоремы Рисса о представлении линейного функционала, оказалась полезной в ряде исследований последних лет, относящихся к вопросам существования решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Теорема (Лакс, Мильграм). Пусть X — гильбертово пространство, и пусть $B(x, y)$ — комплексный функционал, заданный на гильбертовом пространстве $X \times X$ и обладающий свойствами

полуторалинейности:

$$\begin{aligned} B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) &= \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y), \\ B(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) &= \bar{\beta}_1 B(x, y_1) + \bar{\beta}_2 B(x, y_2), \end{aligned} \tag{1}$$

ограниченности: существует такая положительная постоянная γ, что

$$|B(x, y)| \leqslant \gamma \|x\| \cdot \|y\|, \tag{2}$$

положительности: существует положительная постоянная δ, такая, что

$$B(x, x) \geqslant \delta \|x\|^2. \tag{3}$$

Тогда существует определенный единственным образом ограниченный линейный оператор S, обладающий ограниченным обратным линейным оператором S^{-1}, такой, что

$$(x, y) = B(x, Sy) \text{ для всех } x \text{ и } y \in X \text{ и } \|S\| \leqslant \delta^{-1},\ \|S^{-1}\| \leqslant \gamma. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через D совокупность всех элементов $y \in X$, для которых существует такой элемент y^*, что $(x, y) = B(x, y^*)$ для всех $x \in X$. Множество D непусто: $0 \in D$, ибо $0^* = 0 \cdot y^*$. Элемент y^* однозначно определяется элементом y. В самом деле, если w — такой элемент, что $B(x, w) = 0$ для всех x, то $w = 0$, поскольку $0 = B(w, w) \geqslant \delta \|w\|^2$. Так как скалярное произведение (x, y) и функционал $B(x, y)$ полуторалинейны, равенство $Sy = y^*$ определяет линейный оператор S с областью определения $D(S) = D$. Оператор S непрерывен, и $\|Sy\| \leqslant \delta^{-1}\|y\|$ $(y \in D(S))$, потому что

$$\delta\|Sy\|^2 \leqslant B(Sy, Sy) = (Sy, y) \leqslant \|Sy\| \cdot \|y\|.$$

Область $D = D(S)$ образует в X замкнутое линейное подпространство. Это доказывается следующим образом: если $y_n \in D(S)$ и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_\infty$, то, согласно доказанной выше непрерывности оператора S, $\{Sy_n\}$ — фундаментальная последовательность, поэтому существует предел $z = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Sy_n$. Скалярное произведение тоже непрерывно, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(x, y_n) = (x, y_\infty)$. Кроме того, ввиду условия (2) $\lim\limits_{n\to\infty} B(x, Sy_n) = B(x, z)$, и так как $(x, y_n) = B(x, Sy_n)$, то $(x, y_\infty) = B(x, z)$, следовательно, $y_\infty \in D$ и $Sy_\infty = z$, а это и означает, что $D = D(S)$ — замкнутое линейное подпространство.

Итак, первая часть теоремы, т. е. существование оператора S, будет доказана, если мы убедимся в том, что $D(S) = X$. Для этого допустим, что $D(S) \neq X$. Тогда существует такой вектор $w_0 \in X$, что $w_0 \neq 0$ и $w_0 \in D(S)^\perp$. Рассмотрим линейный функционал $F(z) = B(z, w_0)$, заданный на X. Функционал $F(z)$ непрерывен, так как $|F(z)| = |B(z, w_0)| \leqslant \gamma\|z\| \cdot \|w_0\|$. Поэтому, согласно теореме Рисса, существует вектор $w_0' \in X$, такой, что $B(z, w_0) = F(z) = (z, w_0')$ для всех $z \in X$. Это показывает, что $w_0' \in D(S)$ и $Sw_0' = w_0$. Но поскольку $\delta\|w_0\|^2 \leqslant B(w_0, w_0) = (w_0, w_0') = 0$, мы получаем $w_0 = 0$, что противоречит первоначальному допущению.

Докажем теперь существование обратного оператора S^{-1}. Из условия $Sy = 0$ следует, что $(x, y) = B(x, Sy) = 0$ для всех $x \in X$, откуда $y = 0$. Как и выше, можно показать, что для всякого $y \in X$ существует такой вектор y', что $(z, y') = B(z, y)$ для всех $z \in X$. Следовательно, $y = Sy'$ и оператор S^{-1} определен на всем пространстве X. Так как $|(z, S^{-1}y)| = |B(z, y)| \leqslant \gamma\|z\| \cdot \|y\|$, то $\|S^{-1}\| \leqslant \gamma$.

Конкретные приложения теоремы Лакса—Мильграма мы рассмотрим в дальнейших главах. В следующих черырех параграфах мы приведем несколько примеров непосредственных приложений теоремы Рисса.