8. Одно доказательство теоремы Лебега — Никодима[1])

Эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема (Лебег — Никодим). Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой и $\nu(B)$ — некоторая σ-конечная σ-аддитивная неотрицательная мера, заданная на семействе $\mathfrak{B}$. Если мера ν m-абсолютно непрерывна, то существует неотрицательная m-измеримая функция $p(s)$, такая, что

$$\nu(B) = \int_B p(s)\, m(ds) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathfrak{B}, \text{ для которых } \nu(B) < \infty. \tag{1}$$

Более того, „плотность"[2]) $p(s)$ меры $\nu(B)$ (по отношению к мере $m(B)$) определена однозначно в том смысле, что любые две из них совпадают m-п. в.

Доказательство (фон Нейман [2]). Легко видеть, что функция $\rho(B) = m(B) + \nu(B)$ представляет собой σ-конечную σ-аддитивную неотрицательную меру, заданную на $\mathfrak{B}$. Пусть $\{B_n\}$ — последовательность множеств из $\mathfrak{B}$, такая, что $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n \subseteq B_{n+1}$ и $\rho(B_n) < \infty$ для $n = 1, 2, \ldots$. Если мы сможем доказать теорему для всякого множества $B \subseteq B_n$ (при произвольном фиксированном n) и построить плотность $p_n(s)$, то теорема будет верна для любых множеств $B \in \mathfrak{B}$. В самом деле, в этом случае функцию $p(s)$ можно определить следующим образом:

$$p(s) = p_1(s) \quad \text{при} \quad s \in B_1; \quad p(s) = p_{n+1}(s) \quad \text{при} \quad s \in B_{n+1} - B_n,$$
$$n = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, мы можем без ограничения общности считать, что $\rho(S) < \infty$. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$. Формула

$$f(x) = \int_S x(s)\,\nu(ds), \quad x \in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho),$$

определяет ограниченный линейный функционал на $L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$, так как

$$|f(x)| \leqslant \int_S |x(s)|\,\nu(ds) \leqslant \left(\int_S |x(s)|^2 \nu(ds)\right)^{1/2} \cdot \left(\int_S 1 \cdot \nu(ds)\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|_\rho (\nu(S))^{1/2},$$

---

[1]) Эту теорему обычно связывают с именами Лебега, Радона и Никодима. Исторические и библиографические справки по этому вопросу можно найти в книге Данфорда — Шварца [1] (стр. 256). — *Прим. перев.*

[2]) Функцию $p(s)$ называют „производной Радона — Никодима функции $\nu(B)$ по мере m" и обозначают через $d\nu/dm$. — *Прим. перев.*

где $\|x\|_\rho = \left(\int\limits_S |x(s)|^2 \rho(ds)\right)^{1/2}$. Тогда по теореме Рисса существует единственный элемент $y \in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$, такой, что

$$\int\limits_S x(s)\nu(ds) = \int\limits_S x(s)\overline{y(s)}\rho(ds) =$$
$$= \int\limits_S x(s)\overline{y(s)}m(ds) + \int\limits_S x(s)\overline{y(s)}\nu(ds)$$

для всех $x \in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$. Выбирая в качестве x неотрицательные функции и рассматривая вещественные части обеих частей последнего равенства, мы можем считать $y(s)$ также вещественной функцией; тогда для всех неотрицательных функций $x(s) \in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$

$$\int\limits_S x(s)(1 - y(s))\nu(ds) = \int\limits_S x(s)y(s)m(ds). \tag{2}$$

Покажем, что ρ-п. в. $0 \leqslant y(s) < 1$. Для этого положим $E_1 = \{s;\ y(s) < 0\}$ и $E_2 = \{s;\ y(s) \geqslant 1\}$. Пусть $x(s)$ в формуле (2) — характеристическая функция $C_{E_1}(s)$ множества E_1. Тогда левая часть (2) будет неотрицательной, а поэтому $\int\limits_{E_1} y(s)m(ds) \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что $m(E_1) = 0$, а следовательно, $\nu(E_1) = 0$ и $\rho(E_1) = 0$, так как функция ν m-абсолютно непрерывна. Таким же способом, принимая за $x(s)$ характеристическую функцию $C_{E_2}(s)$, можно показать, что $\rho(E_2) = 0$. Следовательно, $0 \leqslant y(s) < 1$ ρ-п. в. на S.

Пусть функция $x(s)$ $\mathfrak{B}$-измерима и ρ-п. в. неотрицательна. Тогда, поскольку $\rho(S) < \infty$, „усеченные“ функции $x_n(s) \equiv \min(x(s), n)$ тоже принадлежат $L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\int\limits_S x_n(s)(1 - y(s))\nu(ds) = \int\limits_S x_n(s)y(s)m(ds) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Эти интегралы монотонно возрастают с ростом n, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S x_n(s)(1 - y(s))\nu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_S x_n(s)y(s)m(ds) = L \leqslant \infty. \tag{4}$$

Так как подинтегральные функции ρ-п. в. неотрицательны, по лемме Лебега — Фату

$$\begin{aligned} L &\geqslant \int\limits_S \varliminf_{n\to\infty} (x_n(s)(1 - y(s)))\nu(ds) = \int\limits_S x(s)(1 - y(s))\nu(ds), \\ L &\geqslant \int\limits_S \varliminf_{n\to\infty} (x_n(s)y(s))m(ds) = \int\limits_S x(s)y(s)m(ds) \end{aligned} \tag{5}$$

при условии, что когда функция $x(s)(1-y(s))$ не является ν-интегрируемой, соответствующая правая часть считается равной ∞; то же относится к функции $x(s)y(s)$. Если функция $x(s)y(s)$ m-интегрируема, то по лемме Лебега — Фату

$$L \leqslant \int_S \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n(s)y(s))\,m(ds) = \int_S x(s)y(s)\,m(ds). \tag{6}$$

Эта формула верна и в том случае, когда функция $x(s)y(s)$ не является m-интегрируемой, если считать, что $L=\infty$. При том же условии справедливо неравенство

$$L \leqslant \int_S x(s)(1-y(s))\,\nu(ds). \tag{7}$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_S x(s)(1-y(s))\,\nu(ds) = \int_S x(s)y(s)\,m(ds) \tag{8}$$

для всех $\mathfrak{B}$-измеримых и ρ-п. в. неотрицательных функций $x(s)$, при условии, что если одна из частей этого равенства обращается в ∞, то и другая часть равна ∞.

Теперь положим

$$x(s)(1-y(s)) = z(s), \quad y(s)(1-y(s))^{-1} = p(s).$$

Тогда (при тех же условиях, что и для формулы (8))

$$\int_S z(s)\,\nu(ds) = \int_S z(s)\,p(s)\,m(ds) \tag{9}$$

для всякой $\mathfrak{B}$-измеримой и ρ-п. в. неотрицательной функции $z(s)$. Если теперь за $z(s)$ принять характеристическую функцию $C_B(s)$ множества $B \in \mathfrak{B}$, то получится формула

$$\nu(B) = \int_B p(s)\,m(ds),$$

справедливая для всех $B \in \mathfrak{B}$. Заключительное утверждение теоремы легко выводится из определения (1) плотности $p(s)$.

Замечание. Прямое доказательство теоремы Лебега — Никодима, основанное на разложении Хана (теорема 3, гл. I, § 3), можно найти в работе Иосида [2]. Это доказательство воспроизведено в книге Халмоша [1]. См. также Сакс [1], Данфорд — Шварц [1].