9. Воспроизводящее ядро

Пусть A — некоторое абстрактное множество, и пусть система X комплексных функций, заданных на A, образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = (f(a), g(a))_a\,[1]. \tag{1}$$

Комплексная функция $K(a, b)$, определенная в области $A \times A$, называется *воспроизводящим ядром* пространства X, если выполняется следующее условие:

$$\begin{gathered}\text{для любого фиксированного значения } b \in A \text{ функция} \\ K(a, b) \text{ принадлежит } X \text{ как функция переменной } a,\end{gathered} \tag{2}$$

$$f(b) = (f(a), K(a, b))_a \text{ и, следовательно, } \overline{f(b)} = (K(a, b), f(a))_a. \tag{3}$$

Следующая теорема относится к вопросу о существовании воспроизводящего ядра.

Теорема 1 (Ароншайн [1], Бергман [1]). Для того чтобы существовало воспроизводящее ядро K пространства X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y_0 \in A$ существовала положительная постоянная C_{y_0}, зависящая от y_0, такая, что

$$|f(y_0)| \leqslant C_{y_0} \|f\| \text{ для всех } f \in X. \tag{4}$$

Доказательство. Применяя к выражению $f(y_0) = (f(x), K(x, y_0))_x$ неравенство Шварца, мы видим, что

$$|f(y_0)| \leqslant \|f\| \cdot (K(x, y_0), K(x, y_0))_x^{1/2} = \|f\| \cdot K(y_0, y_0)^{1/2}, \tag{5}$$

откуда вытекает необходимость условия (4). Для доказательства достаточности применим теорему Рисса к линейному функционалу $F_{y_0}(f) = f(y_0)$, заданному для функций $f \in X$. Тогда в пространстве X существует единственный вектор $g_{y_0}(x)$, такой, что для каждой функции $f \in X$

$$f(y_0) = F_{y_0}(f) = (f(x), g_{y_0}(x))_x.$$

Таким образом, функция $g_{y_0}(x) = K(x, y_0)$ является воспроизводящим ядром пространства X. Из приведенного доказательства видно, что воспроизводящее ядро определяется единственным образом.

Следствие. Имеет место формула

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(y_0)| = (K(y_0, y_0))^{1/2}, \tag{6}$$

[1]) Запись $(f(a), g(a))_a$ отмечает, что соответствующие функции принадлежат X как функции переменной a (они могут зависеть еще от каких-то параметров). — *Прим. перев.*

причем верхняя грань достигается для функции

$$f_0(x) = \rho K(x, y_0)/(K(y_0, y_0))^{1/2}, \qquad |\rho| = 1. \tag{7}$$

Доказательство. Знак равенства в неравенстве Шварца (5) появляется в том и только в том случае, когда $f(x)$ и $K(x, y_0)$ линейно зависимы. Из двух условий $f(x) = \alpha K(x, y_0)$ и $\|f\| = 1$ мы получаем

$$1 = |\alpha|(K(x, y_0), K(x, y_0))_x^{1/2} = |\alpha|(K(y_0, y_0))^{1/2},$$

$$\text{т. е. } |\alpha| = (K(y_0, y_0))^{-1/2}.$$

Отсюда ясно, что равенство в формуле (5) достигается для функции $f_0(x)$.

Пример. Рассмотрим гильбертово пространство $A^2(G)$. Для всякой функции $f \in A^2(G)$ и любой точки $z \in G$ (см. гл. I, § 9 (4)) мы имеем

$$|f(z_0)|^2 \leqslant (\pi r^2)^{-1} \int\limits_{|z-z_0| \leqslant r} |f(z)|^2 \, dx \, dy \quad (z = x + iy).$$

Поэтому в пространстве $A^2(G)$ имеется воспроизводящее ядро. Обозначим его через $K_G(z, z')$. Ядро $K_G(z, z')$ называется *ядром Бергмана* области G комплексной плоскости.

Следующая теорема Бергмана иллюстрирует роль ядра $K_G(z, z')$ в теории конформных отображений.

Теорема 2. Пусть G — односвязная ограниченная открытая область комплексной плоскости, и пусть z_0 — произвольная точка этой области. По теореме Римана существует единственная регулярная функция $w = f(z; z_0)$ переменной z, отображающая взаимно однозначно и конформно область G на круг $|w| \leqslant \rho_G$ комплексной w-плоскости таким образом, что

$$f_0(z_0; z_0) = 0; \qquad \left.\frac{df_0(z; z_0)}{dz}\right|_{z=z_0} = 1.$$

Ядро Бергмана $K_G(z; z_0)$ связано с функцией $f_0(z; z_0)$ соотношением

$$f_0(z; z_0) = (K_G(z_0; z_0))^{-1} \int\limits_{z_0}^{z} K_G(t; z_0) \, dt, \tag{8}$$

где интеграл берется по любой спрямляемой дуге, лежащей в области G и соединяющей точки z_0 и z.

Доказательство. Положим

$$A_1^2(G) = \{f(z);\ f(z) \text{ голоморфна в } G,\ f'(z) \in A^2(G),$$
$$f(z_0) = 0 \text{ и } f'(z_0) = 1\}$$

и для производной функции $f \in A_1^2(G)$ рассмотрим число

$$\|f'\|^2 \equiv \int_G |f'(z)|^2\, dx\, dy, \quad z = x + iy. \tag{9}$$

Если через $z = \varphi(w)$ обозначить функцию, обратную к $w = f_0(z;\ z_0)$, то для всякой функции $f \in A_1^2(G)$

$$\|f'\|^2 = \iint_{|w| < \rho_G} |f'(\varphi(w))|^2 \cdot |\varphi'(w)|^2\, du\, dv, \quad w = u + iv,$$

так как из условий Коши — Римана

$$x_u = y_v, \qquad x_v = -y_u$$

следует, что

$$dx\, dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv + (x_u y_v - y_u x_v)\, du\, dv =$$
$$= (x_u^2 + y_u^2)\, du\, dv = |\varphi'(w)|^2\, du\, dv.$$

Пусть $f \in A_1^2(G)$; разложим в степенной ряд выражение $F(w) = f(\varphi(w))$:

$$F(w) = f(\varphi(w)) = w + \sum_{n=2}^{\infty} c_n w^n \quad \text{при} \quad |w| < \rho_G.$$

Тогда $F'(w) = f'(\varphi(w))\,\varphi'(w) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n c_n w^{n-1}$, и поэтому

$$\|f'\|^2 = \iint_{|w| < \rho_G} \left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n w^{n-1} \right|^2 du\, dv =$$
$$= \int_0^{\rho_G} dr \left\{ \int_0^{2\pi} \left(r + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n|^2 r^{2n-1} \right) d\theta \right\} = \pi\rho_G^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \pi n\, |c_n|^2 \rho_G^{2n}.$$

Отсюда видно, что $\min\limits_{f \in A_1^2(G)} \|f'\| = \sqrt{\pi}\,\rho_G$, и этот минимум достигается тогда и только тогда, когда $F(w) = f(\varphi(w)) = w$, т. е. тогда и только тогда, когда $f(z) = f_0(z;\ z_0)$.

Для любой функции $f \in A_1^2(G)$ положим $g(z) = f(z)/\|f'\|$. Тогда $\|g'\| = 1$. Рассмотрим множество

$$\tilde{A}^2(G) = \{g(z);\ g(z) \text{ голоморфна в } G;$$
$$g(z_0) = 0,\ g'(z_0) > 0 \text{ и } \|g'\| = 1\}.$$

Из сказанного выше следует [1]), что

$$\underset{g \in \tilde{A}^2(G)}{\text{maximum}}\, g'(z_0) = \frac{1}{\| f_0' \|} = \left(\sqrt{\pi}\, \rho_G\right)^{-1},$$

и этот максимум достигается тогда и только тогда, когда функция $g(z)$ равна функции

$$g_0(z) = f_0(z;\ z_0)/\| f_0' \| = f_0(z;\ z_0)/\sqrt{\pi}\, \rho_G.$$

Используя (7), находим

$$g_0'(z) = \left(\sqrt{\pi}\, \rho_G\right)^{-1} \frac{df_0(z;\ z_0)}{dz} = \lambda K_G(z;\ z_0)/(K_G(z_0;\ z_0))^{1/2}, \quad |\lambda| = 1.$$

Отсюда, полагая $z = z_0$, получаем

$$\left(\lambda \sqrt{\pi}\, \rho_G\right)^{-1} = K_G(z_0;\ z_0)/(K_G(z_0;\ z_0))^{1/2} = (K_G(z_0;\ z_0))^{1/2};$$

тем самым доказана формула

$$\frac{df_0(z;\ z_0)}{dz} = K_G(z;\ z_0)/K_G(z_0;\ z_0).$$

10. *Отрицательная норма по Лаксу*

Обозначим через $H_0^s(\Omega)$ пополнение предгильбертова пространства $C_0^\infty(\Omega)$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi)_s$ и нормой $\|\varphi\|_s$, определенными формулами

$$(\varphi, \psi)_s = \sum_{|j| \leqslant s} \int_\Omega D^j\varphi(x) \cdot \overline{D^j\psi(x)}\, dx, \quad \|\varphi\|_s = (\varphi, \varphi)_s^{1/2}. \tag{1}$$

Каждый элемент $b \in H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ определяет на пространстве $H_0^s(\Omega)$ непрерывный линейный функционал

$$f_b(w) = (w, b)_0, \quad w \in H_0^s(\Omega). \tag{2}$$

Согласно неравенству Шварца,

$$|(w, b)_0| \leqslant \|w\|_0 \cdot \|b\|_0 \leqslant \|w\|_s \cdot \|b\|_0.$$

Определим теперь для элементов $b \in H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ *отрицательную норму*

$$\|b\|_{-s} = \sup_{w \in H_0^s(\Omega),\ \|w\|_s \leqslant 1} |f_b(w)| = \sup_{w \in H_0^s(\Omega),\ \|w\|_s \leqslant 1} |(w, b)_0|. \tag{3}$$

---

[1]) Действительно, всякой функции $g(z) \in \tilde{A}^2(G)$ соответствует единственная функция $f(z) = g(z)/g'(z_0) \in A_1^2(G)$, такая, что $g(z) = f(z)/\|f'\|$, поэтому $\underset{g \in \tilde{A}^2(G)}{\text{maximum}}\, g'(z_0) = \left(\underset{f \in A_1^2(G)}{\text{minimum}}\, \|f\|\right)^{-1}$. — *Прим. перев.*