Из сказанного выше следует [1]), что

$$\underset{g \in \widetilde{A}^2(G)}{\operatorname{maximum}} g'(z_0) = \frac{1}{\|f_0'\|} = \left(\sqrt{\pi}\rho_G\right)^{-1},$$

и этот максимум достигается тогда и только тогда, когда функция $g(z)$ равна функции

$$g_0(z) = f_0(z;\ z_0)/\|f_0'\| = f_0(z;\ z_0)/\sqrt{\pi}\rho_G.$$

Используя (7), находим

$$g_0'(z) = \left(\sqrt{\pi}\rho_G\right)^{-1} \frac{df_0(z;\ z_0)}{dz} = \lambda K_G(z;\ z_0)/(K_G(z_0;\ z_0))^{1/2}, \quad |\lambda| = 1.$$

Отсюда, полагая $z = z_0$, получаем

$$\left(\lambda\sqrt{\pi}\rho_G\right)^{-1} = K_G(z_0;\ z_0)/(K_G(z_0;\ z_0))^{1/2} = (K_G(z_0;\ z_0))^{1/2};$$

тем самым доказана формула

$$\frac{df_0(z;\ z_0)}{dz} = K_G(z;\ z_0)/K_G(z_0;\ z_0).$$

10. Отрицательная норма по Лаксу

Обозначим через $H_0^s(\Omega)$ пополнение предгильбертова пространства $C_0^\infty(\Omega)$ со скалярным произведением $(\varphi,\ \psi)_s$ и нормой $\|\varphi\|_s$, определенными формулами

$$(\varphi,\ \psi)_s = \sum_{|j| \leqslant s} \int_\Omega D^j\varphi(x)\cdot\overline{D^j\psi(x)}\,dx, \quad \|\varphi\|_s = (\varphi,\ \varphi)_s^{1/2}. \tag{1}$$

Каждый элемент $b \in H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ определяет на пространстве $H_0^s(\Omega)$ непрерывный линейный функционал

$$f_b(w) = (w,\ b)_0, \quad w \in H_0^s(\Omega). \tag{2}$$

Согласно неравенству Шварца,

$$|(w,\ b)_0| \leqslant \|w\|_0\cdot\|b\|_0 \leqslant \|w\|_s\cdot\|b\|_0.$$

Определим теперь для элементов $b \in H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ *отрицательную норму*

$$\|b\|_{-s} = \sup_{w \in H_0^s(\Omega),\ \|w\|_s \leqslant 1} |f_b(w)| = \sup_{w \in H_0^s(\Omega),\ \|w\|_s \leqslant 1} |(w,\ b)_0|. \tag{3}$$

---

[1]) Действительно, всякой функции $g(z) \in \widetilde{A}^2(G)$ соответствует единственная функция $f(z) = g(z)/g'(z_0) \in A_1^2(G)$, такая, что $g(z) = f(z)/\|f'\|$, поэтому $\underset{g \in \widetilde{A}^2(G)}{\operatorname{maximum}} g'(z_0) = \left(\underset{f \in A_1^2(G)}{\operatorname{minimum}} \|f\|\right)^{-1}$. — *Прим. перев.*

Из этого определения видно, что

$$\|b\|_{-s} \leqslant \|b\|_0, \tag{4}$$

а так как $\|b\|_{-s} \geqslant \left|(w/\|w\|_s, b)_0\right|$, то

$$\left|(w, b)_0\right| \leqslant \|w\|_s \cdot \|b\|_{-s}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\|b\|_{-s} = \|f_b\|_{-s} = \sup_{\|w\|_s \leqslant 1} \left|(w, b)_0\right| \quad \text{для любого} \quad b \in H_0^0(\Omega). \tag{3$'$}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1 (П. Лакс [2]). Сопряженное к $H_0^s(\Omega)$ пространство $H_0^s(\Omega)'$ можно отождествить с пополнением пространства $H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ по отрицательной норме.

Для доказательства нам потребуется следующее

Предложение. Множество F всех непрерывных линейных функционалов вида f_b, заданных в $H_0^s(\Omega)$, плотно в гильбертовом пространстве $H_0^s(\Omega)'$, сопряженном к пространству $H_0^s(\Omega)$.

Доказательство. Множество F *тотально* на $H_0^s(\Omega)$ в том смысле, что если для некоторого фиксированного $w \in H_0^s(\Omega)$ мы имеем $f_b(w) = 0$ для всех $b \in H_0^0(\Omega)$, то $w = 0$. Это следует из того, что всякий элемент $w \in H_0^s(\Omega)$ в то же время является элементом пространства $H_0^0(\Omega)$.

Допустим, что множество F не является плотным в гильбертовом пространстве $H_0^s(\Omega)'$; тогда во втором сопряженном пространстве $H_0^s(\Omega)'' = \left(H_0^s(\Omega)'\right)'$ найдется такой элемент $T \neq 0$, что $T(f_b) = 0$ для всех $f_b \in F$. В силу рефлексивности гильбертова пространства $H_0^s(\Omega)$ в нем найдется элемент $t \in H_0^s(\Omega)$, такой, что $T(f) = f(t)$ для всех $f \in H_0^s(\Omega)'$. Поэтому $T(f_b) = f_b(t) = 0$ при всех $b \in H_0^0(\Omega)$. Множество F, как показано выше, тотально, следовательно, $t = 0$, а это противоречит тому, что $T \neq 0$.

Следствие. Имеет место формула, двойственная к (3′):

$$\|w\|_s = \sup_{b \in H_0^0(\Omega),\ \|b\|_{-s} \leqslant 1} \left|(w, b)_0\right| \quad \text{для всех} \quad w \in H_0^s(\Omega). \tag{6}$$

Доказательство. Так как множество $F = \{f_b;\ b \in H_0^0(\Omega)\}$ плотно в $H_0^s(\Omega)'$, это утверждение вытекает из следствия 3 § 6 гл. III.

Доказательство теоремы 1. Множество F плотно в сопряженном пространстве $H_0^s(\Omega)'$, и соответствие

$$F \ni f_b \leftrightarrow b \in H_0^0(\Omega), \quad \|f_b\|_{-s} = \|b\|_{-s},$$

взаимно однозначно и сохраняет отрицательную норму. Отсюда вытекает теорема 1.

Обозначим пополнение пространства $H_0^0(\Omega)$ по отрицательной норме $\|b\|_{-s}$ через $H_0^{-s}(\Omega)$. Тогда

$$H_0^s(\Omega)' = H_0^{-s}(\Omega). \tag{7}$$

Для всякого непрерывного линейного функционала f на $H_0^s(\Omega)$ обозначим через $\langle w, f\rangle$ его значение в точке $w \in H_0^s(\Omega)$. Таким образом, для всякого элемента $b \in H_0^0(\Omega)$

$$f_b(w) = (w, b)_0 = \langle w, f_b\rangle = \langle w, b\rangle, \quad w \in H_0^s(\Omega), \tag{8}$$

а неравенство (5) можно записать в виде

$$|\langle w, b\rangle| \leqslant \|w\|_s \cdot \|b\|_{-s}; \tag{9}$$

при этом получается обобщенное неравенство Шварца.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2 (П. Лакс [2]). Всякий непрерывный линейный функционал $g(b)$ на $H_0^{-s}(\Omega)$ может быть представлен с помощью некоторого фиксированного элемента $w \in H_0^s(\Omega)$ в виде

$$g(b) = g_w(b) = \langle \overline{w, b}\rangle. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$H_0^s(\Omega)' = H_0^{-s}(\Omega), \quad H_0^{-s}(\Omega)' = H_0^s(\Omega). \tag{11}$$

Доказательство. Если $b \in H_0^0(\Omega)$, то $\langle w, b\rangle = f_b(w) = (w, b)_0$. Так как множество $F = \{f_b;\ b \in H_0^0(\Omega)\}$ плотно в гильбертовом пространстве $H_0^s(\Omega)'$, то, как следует из (9), выражение $\langle\overline{w, b}\rangle = (b, w)_0$ при всяком фиксированном $w \in H_0^s(\Omega)$ определяет линейный функционал g_w, непрерывный на плотном подмножестве F пространства $H_0^s(\Omega)'$. Норму этого функционала на множестве F обозначим через $\|g_w\|_s$. Тогда ввиду (6)

$$\|g_w\|_s = \sup_{\|b\|_{-s} \leqslant 1} |(b, w)_0| = \sup_{\|b\|_{-s} \leqslant 1} |(w, b)_0| = \|w\|_s. \tag{12}$$

Вследствие непрерывности мы можем продолжить функционал g_w, определенный на F, до непрерывного линейного функционала на пополнении множества F (по отрицательной норме), т. е. функционал g_w может быть продолжен до непрерывного линейного функционала на пространстве $H_0^s(\Omega)' = H_0^{-s}(\Omega)$. Это продолжение мы попрежнему будем обозначать через g_w. Итак,

$$\|g_w\| = \sup_{\|b\|_{-s} \leqslant 1} |g_w(b)| = \|w\|_s. \tag{13}$$

Следовательно, принимая во внимание полноту пространства $H_0^s(\Omega)$, мы можем рассматривать совокупность G всех непрерывных линейных функционалов g_w на $H_0^{-s}(\Omega)$ как замкнутое линейное подпространство из $H_0^{-s}(\Omega)'$, имея в виду соответствие $g_w \longleftrightarrow w$. Если это замкнутое подпространство G не является плотным в $H_0^{-s}(\Omega)'$, то найдется непрерывный линейный функционал $f \neq 0$ на $H_0^{-s}(\Omega)'$, такой, что $f(g_w) = 0$ для всех $g_w \in G$. Но так как гильбертово пространство $H_0^{-s}(\Omega)$ рефлексивно, такой функционал f определяется соотношением $f(g_w) = g_w(f_0)$, $f_0 \in H_0^{-s}(\Omega)$, и поэтому элемент f_0, согласно (3′), должен быть равен нулю. Последнее противоречит тому, что $f \neq 0$. Тем самым доказано, что $H_0^{-s}(\Omega)' = H_0^s(\Omega)$.

Замечание. П. Лакс ввел понятие отрицательной нормы, имея в виду использовать его при исследовании вопроса о существовании производных (в обычном смысле) у обобщенных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Проблемы, связанные с дифференцируемостью обобщенных решений, мы рассмотрим в дальнейших главах. Следует заметить, что понятие отрицательной нормы можно также естественным образом ввести с помощью преобразования Фурье. Это было сделано Лере [1] раньше, чем П. Лаксом. Более подробно мы коснемся этих вопросов в главе, посвященной преобразованию Фурье.

11. Локальная структура обобщенных функций

Всякая обобщенная функция локально совпадает с обобщенной производной некоторой функции. Точнее справедлива следующая

Теорема (Л. Шварц [1]). Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq R^n$ задана обобщенная функция T. Тогда для любого бикомпактного подмножества $K \subset \Omega$ существуют положительное целое число $m_0 = m_0(T, K)$ и функция $f(x) = f(x; T, K, m_0) \in L^2(K)$, такие, что

$$T(\varphi) = \int_K f(x) \frac{\partial^{nm_0} \varphi(x)}{\partial x_1^{m_0} \partial x_2^{m_0} \ldots \partial x_n^{m_0}} dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega). \tag{1}$$

Доказательство. Согласно следствию § 8 гл. I, существуют положительная постоянная C и положительное целое m, такие, что

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant m,\ x \in K} |D^j \varphi(x)| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega). \tag{2}$$